

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ لـ رـ اـ خ

Math

@Flow_KonKour



@LoPRax_KonKour



کلیک کن وباماهمراه شو!

۱

ابتدا تعداد کل حالت‌های ممکن را محاسبه می‌کنیم:

$$n(S) = \frac{8!}{2}$$

به خاطر دو حرف تکراری

می‌دانیم که کلمه موردنظر با حرف O شروع می‌شود. بنابراین برای اینکه حروف یکسان در کنار هم نباشند، حرف دوم نباید O باشد، پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$\underline{O} \quad \underline{5} \quad \underline{5} \quad \underline{4} \quad \underline{3} \quad \underline{2} \quad \underline{1} \quad \underline{a} \Rightarrow n(A) = 5 \times 5!$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5 \times 5!}{\frac{8!}{2}} = \frac{2 \times 5 \times 5!}{8!} = \frac{2 \times 5 \times \cancel{4!}}{8 \times 7 \times 6 \times \cancel{4!}} = \frac{5}{168}$$

در نتیجه:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲

پیشامدهای A و B را به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم:

A: پیشامد آن‌که ورزشکار قهرمان شود.

B: پیشامد آن‌که ورزشکار دوپینگ کند.

بنابراین:

$$P(A|B) = 2P(A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 2P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = 2P(A)P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2P(A)P(B)}{P(A)} = 2P(B) = 2 \times \frac{10}{100} = \frac{20}{100} = 20\%$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳

اگر فرض کنیم احتمال موفقیت در آزمون شیمی X باشد، آن‌گاه احتمال موفقیت در آزمون فیزیک 3x است.

$$P(p) = 3x, P(c) = x$$

$$P(p \cup c) = P(p) + P(c) - \underbrace{P(p \cap c)}_{P(p) \cdot P(c)} \Rightarrow \frac{13}{16} = 3x + x - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 - 4x + \frac{13}{16} = 0 \Rightarrow (x - \frac{1}{4})(3x - \frac{13}{4}) = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = \frac{13}{12} \end{cases} \Rightarrow P(c-p) = P(c) \cdot P(p') \xrightarrow{P(c)=\frac{1}{4}, P(p)=\frac{3}{4}} P(c-p) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

غ ق ق

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴

فرض کنیم تعداد مهره قرمز در ظرف B برابر n باشد، در این صورت، احتمال آن که هر ۴ مهره قرمز باشد، برابر است با:

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} \times \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+4}{2}} = \frac{1}{27} \Rightarrow \frac{\frac{4 \times 3}{2}}{\frac{10 \times 9}{2}} \times \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+4)(n+3)}{2}} = \frac{12n(n-1)}{9 \cdot (n+3)(n+4)} = \frac{1}{27}$$

مهره کیسه A قرمز باشد مهره کیسه B قرمز باشد

$$\Rightarrow \frac{2n(n-1)}{3(n+3)(n+4)} = \frac{1}{27} \Rightarrow 18n(n-1) = 3(n^2 + 7n + 12)$$

$$\Rightarrow 13n^2 - 53n - 60 = 0 \Rightarrow (n-5)(13n+12) = 0 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow \text{تعداد مهره B} = 9$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵

طبق گفته سوال: $P(A-B) = P(A \cap B)$ ، پس:

$$P(A-B) = P(A \cap B) \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A)P(B')$$

$$\Rightarrow P(B) = P(B') \Rightarrow P(B) = 1 - P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A)P(B)$$

$$= P(A) + \frac{1}{2} - P(A) = \frac{1}{2} \quad \text{چون } P(B) = \frac{1}{2} \text{، پس:}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶

چون در ابتدا مهره خارج شده را مشاهده نکرده‌ایم، مانند آن است که هیچ مهره‌ای از جعبه خارج نشده است. پس می‌توانیم این گونه برداشت کنیم که از جعبه دو مهره خارج می‌کنیم و احتمال هم‌رنگ بودن را می‌خواهیم.

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{6+3+1}{36} = \frac{5}{18}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷

اگر پیشامد مجموع دو تاس بزرگ‌تر از ۸ ظاهر شود را B بنامیم و پیشامد هر دو تاس زوج ظاهر شود را A، به دنبال $P(A|B)$ هستیم. از طرفی:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

$$B = \{(3,6), (6,3), (4,5), (5,4), (4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\}$$

همین‌طور:

$$A \cap B = \{(4,6), (6,4), (6,6)\}$$

$$P(A|B) = 0/3$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸

کل افراد کلاس ۲۰ نفر است، پس:

غیرورزشکار ورزشکار

معدل بالای ۱۷	y	۷
معدل پایین ۱۷	x	۱۱-x

$$7 + y + 11 - x + x = 20 \Rightarrow y = 2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{20} = 0.1$$

یعنی ۲ نفر هستند که معدل بالای ۱۷ دارند و ورزش نمی‌کنند، پس این احتمال برابر است با:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹

از فضای نمونه‌ای کاهش یافته استفاده می‌کنیم، یعنی فضای نمونه‌ای را اعداد مضرب ۵ در نظر می‌گیریم.

حالت اول: رقم یکان صفر باشد:

$$\begin{array}{c} 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \\ \downarrow \\ \text{صفر باشد} \end{array} = 24$$

$$\begin{array}{c} 3 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{صفر نباشد} \quad \text{۵ باشد} \end{array} = 18$$

حالت دوم: رقم یکان ۵ باشد:

$$P(A) = \frac{24}{24+18} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

پس احتمال مطلوب برابر است با:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰

روش اول:

حداقل یک خانواده در این سوال، یعنی یک خانواده یا دو خانواده انتخاب شوند.

$$P(A) = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{1} + \binom{6}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{6 \times 10 \times 2 \times 2 + \frac{6 \times 5}{2}}{\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1}} = \frac{6 \times 10 \times 2 \times 2 + 3 \times 5}{11 \times 5 \times 9} = \frac{17}{33}$$

روش دوم:

از حالت متمم کمک می‌گیریم و فرض می‌کنیم که ۴ نفر انتخابی از خانواده‌های جداگانه‌ای باشند و هیچ دو نفری متعلق به یک خانواده نباشند:

$$P(A') = \frac{\binom{6}{4}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{12}{4}} = \frac{16}{33} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{16}{33} = \frac{17}{33}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

فرض می‌کنیم در ابتدا n مهره سفید در جعبه بوده باشد.

$$P(\text{هر ۲ مهره هم‌رنگ نباشند}) = \frac{\binom{n}{1} \binom{6}{1}}{\binom{n+6}{2}}$$

$$P(\text{هر ۲ مهره سفید باشد}) = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+6}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\binom{n}{1} \binom{6}{1}}{\binom{n+6}{2}} = \frac{12}{7} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+6}{2}} \Rightarrow 7 \binom{n}{1} \binom{6}{1} = 12 \binom{n}{2}$$

$$7 \times n \times 6 = 12 \times \frac{n!}{2!(n-2)!} \Rightarrow 42n = \frac{12}{2} n(n-1) \Rightarrow 42 = 6(n-1) \Rightarrow 7 = n-1 \Rightarrow n = 8$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

اگر احتمال قبولی در آزمون مدرسه A را با $P(A)$ و احتمال قبولی در آزمون ورودی مدرسه B را با $P(B)$ نمایش دهیم، بنابراین:

احتمال قبولی سارا فقط در یک آزمون $P(A-B) + P(B-A) =$

$$P(A \cap B') + P(B \cap A') = P(A) \times P(B') + P(B) \times P(A') = \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

دقت کنید مفهوم قبولی سارا فقط در یک آزمون این است که در آزمون A قبول شود و در B نشود یا در B قبول شود و در A نشود.

و مفهوم قبولی سارا در حداقل یک آزمون یعنی یا در A قبول شود و در B نشود یا در B قبول شود و در A نشود یا در هر دو قبول شود که متمم آن این است که در هر دو قبول نشود، یعنی:

$$1 - P(A' \cap B') = P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(B \cap A') + P(A \cap B)$$

از طرفی، چون A و B مستقل‌اند (قبولی در مدرسه A ارتباطی به قبولی در مدرسه B ندارد)، تمامی اشتراک‌ها به ضرب تبدیل می‌شود.

بنابراین، احتمال قبولی سارا در حداقل یک آزمون برابر است با:

$$1 - P(A' \cap B') = 1 - P(A') \times P(B') = 1 - \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$$

در نتیجه نسبت احتمال قبولی سارا فقط در یک آزمون به احتمال قبولی او در حداقل یک آزمون برابر $\frac{0.3}{\frac{1}{3}} = 0.9$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳

با توجه به اینکه A و B دو پیشامد مستقل هستند، پس $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ می‌باشد، پس داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = 0.4$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = P(A) + (1 - P(B)) - P(A) \times (1 - P(B))$$

$$= 1 + P(A) - P(B) - P(A) + P(A) \times P(B) = 1 - P(B) + P(A) \times P(B) = 0.8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = 0.4 \\ 1 - P(B) + P(A) \times P(B) = 0.8 \end{cases} \xrightarrow{+} 1 + P(A) = 1.2 \rightarrow P(A) = 0.2$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + P(B) - 0.2 \times P(B) = 0.4 \Rightarrow 0.8P(B) = 0.2 \Rightarrow P(B) = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \times P(B) = 0.2 - 0.2 \times 0.25 = 0.2 - 0.05 = 0.15$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴

باید $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت باشد.

$$y = (k-2)x^2 + 2kx + k + 2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \Rightarrow k^2 - (k-2)(k+2) < 0 \Rightarrow k > 6 \quad (1) \\ k-2 > 0 \Rightarrow k > 2 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow k > 6 \Rightarrow k \in \{7, 8, 9\}$$

$$P = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{9}{1}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵

تعداد کل حالت‌هایی که ۶ نفر می‌توانند در یک صف بایستند برابر ۶! است.

تعداد حالت‌هایی که دو برادر کنار هم می‌ایستند برابر ۵! × ۲ است.

بنابراین احتمال اینکه دو برادر کنار هم بایستند برابر است با:

$$\frac{5! \times 2}{6!} = \frac{2}{6}$$

$$1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

پس احتمال اینکه دو برادر کنار هم نباشند برابر است با:

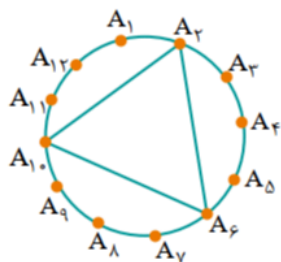
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶

تعداد کل مثلثهایی که می توان رسم کرد برابر تعداد حالت های انتخاب ۳ نقطه از ۱۲ نقطه می باشد که برابر است با:

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3! \times 9!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220$$

تعداد مثلث های متساوی الاضلاع قابل رسم برابر ۴ است که عبارتند از مثلث های $A_1 A_5 A_9$ ، $A_2 A_6 A_{10}$ ، $A_3 A_7 A_{11}$ و $A_4 A_8 A_{12}$.



$$\frac{4}{220} = \frac{1}{55}$$

بنابراین احتمال متساوی الاضلاع بودن مثلث برابر است با:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷

اگر A پیشامد قبولی علی در امتحان ریاضی و B پیشامد قبولی او در امتحان فیزیک باشد، آن گاه:

$$P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{3}{5}, P(B|A) = \frac{2}{5} + \frac{20}{100} \times \frac{2}{5} = \frac{18}{25}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{18}{25} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{2}{5}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{36}{125}$$

بنابراین:

در نتیجه احتمال پیشامد خواسته شده یعنی اجتماع دو پیشامد A و B برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{36}{125} = \frac{89}{125}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸

$$P(A|B) = 2P(B|A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A) = 2P(B)$$

توجه کنید که:

$$P(A \cup B) = 2P(A \cap B) \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 2P(A \cap B) \Rightarrow P(A) + P(B) = 3P(A \cap B)$$

از طرف دیگر:

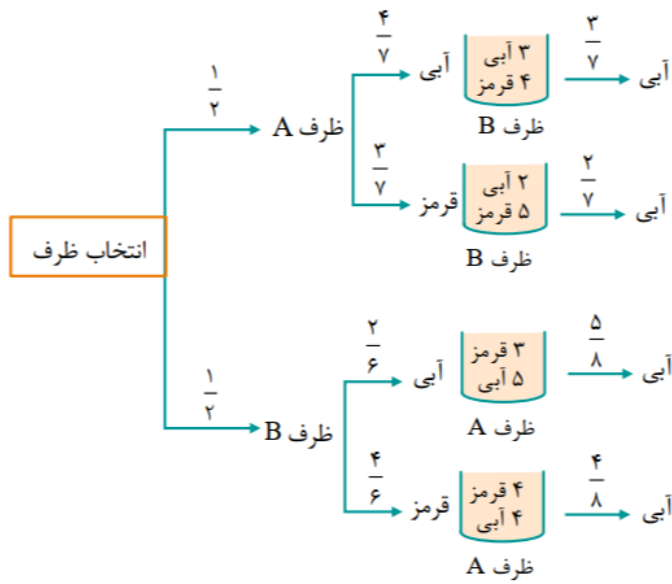
$$\Rightarrow 2P(B) + P(B) = 3P(A \cap B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}P(A \cap B) \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}P(A \cap B)$$

$$P(A|B) + P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{3}P(A \cap B)} + \frac{P(A \cap B)}{\frac{2}{3}P(A \cap B)} = \frac{3}{1} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

مطابق نمودار درختی پایین، احتمال آبی بودن مهره انتخاب شده برابر است با:



$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{6} \times \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{8}\right)$$

$$= \frac{6}{49} + \frac{3}{49} + \frac{5}{48} + \frac{1}{6} = \frac{1069}{2352}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cup B) = 0/6 + 0/7 - 0/6 \times 0/7 = 0/88$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

چون از رنگ دو مهره اولیه بی اطلاع هستیم، گویی هیچ مهره‌ای از کیسه اولیه خارج نشده است. می‌خواهیم از این کیسه دو مهره خارج کنیم و احتمال آن‌که هر دو سبز باشند را محاسبه نماییم.

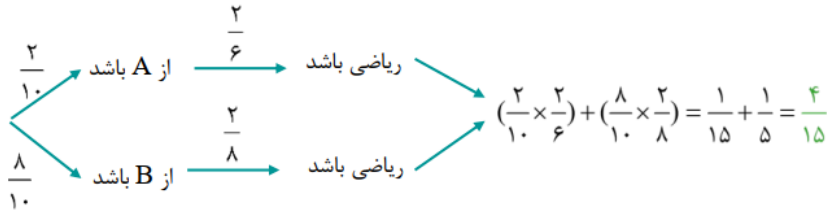
$$P = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ترکیب کلاس B در حالت جدید به صورت مقابل است:

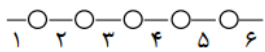
$b_1 b_2$	
$b_3 b_4$	$a_1 a_2$
$b_5 b_6$	
$b_7 b_8$	

۲ نفر از کلاس A و ۸ نفر از کلاس B قدیم:



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ابتدا جایگاه ایرانی‌ها را به صورت ○ مشخص می‌کنیم.



برای این که یونانی‌ها کنار یکدیگر نباشند، باید در ۳ جایگاه از ۶ جایگاه — قرار بگیرند.

$$P(A) = \frac{\binom{6}{3} \times 3! \times 5!}{8!} = \frac{20 \times 6!}{8!} = \frac{20}{8 \times 7} = \frac{5}{14}$$

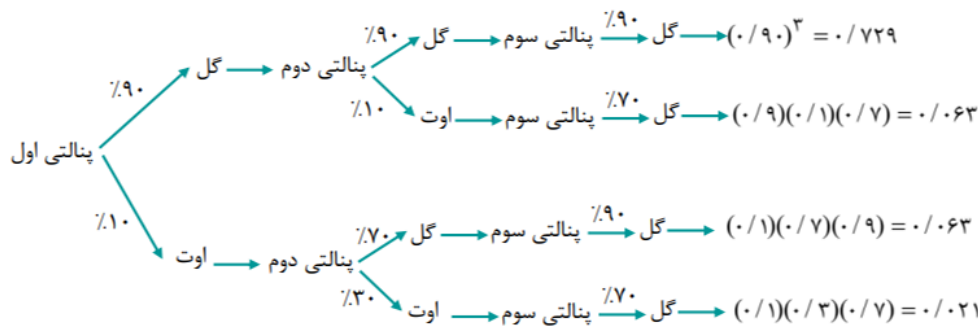
برای اینکه یونانی‌ها به صورت یک در میان باشند، باید در یکی از حالات (۱, ۲, ۳) یا (۲, ۳, ۴) یا (۳, ۴, ۵) یا (۴, ۵, ۶) قرار بگیرند.

$$P(B) = \frac{4 \times 3! \times 5!}{8!} = \frac{4 \times 6!}{8!} = \frac{4}{8 \times 7} = \frac{1}{14}$$

$$P(A) - P(B) = \frac{5}{14} - \frac{1}{14} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



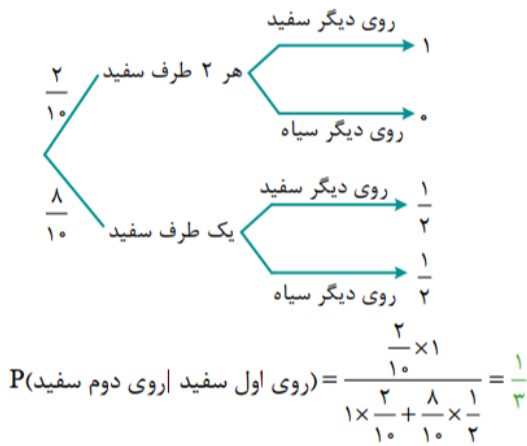
$$P(\text{پنالتی سوم گل شود}) = 0.729 + 0.063 + 0.063 + 0.021 = 0.876$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\frac{3}{17} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{17} \times \frac{4}{8} + \frac{10}{17} \times \frac{4}{10} = \frac{90 + 160 + 320}{17 \times 8 \times 10} = \frac{570}{17 \times 80} = \frac{57}{136}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷

(مهره انتخابی متعلق به جعبه B باشد و سفید باشد) + P (مهره انتخابی متعلق به جعبه A باشد و سفید باشد) = P (مطلوب)

$$= \frac{5}{8} \times \frac{4}{12} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{10} = \frac{5}{24} + \frac{3}{40} = \frac{34}{120} = \frac{17}{60}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸

احتمال این که تاس مضرب ۳ نباشد. $\uparrow$ $\downarrow$ احتمال این که در سه پرتاب فقط یک سکه به رو ظاهر شود.

احتمال این که تاس مضرب ۳ باشد. $\uparrow$ $\downarrow$ احتمال این که در دو پرتاب فقط یک سکه به رو ظاهر شود.

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹

اگر B_1 پیشامد انتخاب لامپ از جعبه اول و B_2 پیشامد انتخاب لامپ از جعبه دوم و A پیشامد انتخاب لامپ معیوب باشد، طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{96} = \frac{1}{4} + \frac{1}{48} = \frac{13}{48}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰

می‌دانیم اگر پیشامدهای A و B مستقل باشند، آن‌گاه پیشامدهای A' و B' نیز مستقل خواهند بود. بنابراین داریم:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} \Rightarrow P((A \cup B)') = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow P(A' \cap B') = \frac{1}{2}$$

به دلیل مستقل بودن A' و B' $\rightarrow P(A')P(B') = \frac{1}{2}$ (۱)

بدیهی است که چون طبق صورت سوال $P(A) = P(B)$ پس $P(A') = P(B')$ است و اگر فرض کنیم $P(A') = x$ ، در این صورت، طبق رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$x \times x = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P(A') = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$A = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲

بیماری ریوی را R و بیماری قلبی را B در نظر می‌گیریم.

$$P(R) = \frac{2}{7} \Rightarrow P(B|R) = \frac{P(R \cap B)}{P(R)}$$

$$P(B) = \frac{1}{5}$$

$$P(B|R) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

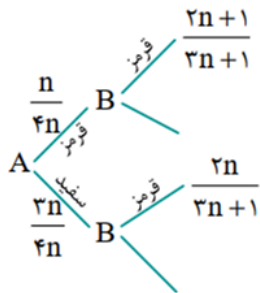
$$\Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{P(R \cap B)}{\frac{2}{7}} \Rightarrow P(R \cap B) = \frac{4}{35}$$

$$P(R \cup B) = \frac{2}{7} + \frac{1}{5} - \frac{4}{35} = \frac{10 + 7 - 4}{35} = \frac{13}{35}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳

به کمک نمودار درختی داریم:



$$\frac{1}{4} \times \frac{2n+1}{3n+1} + \frac{3}{4} \times \frac{2n}{3n+1} = \frac{2n+1}{4(3n+1)} \Rightarrow \frac{2n+1}{4(3n+1)} = \frac{5}{8} \Rightarrow 2+16n=15n+5 \Rightarrow n=3$$

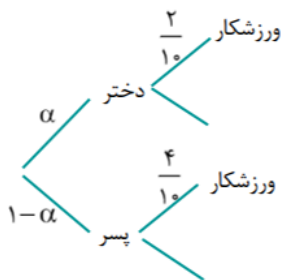
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴

مطابق قانون احتمالی کل:

$$P(\text{پسر | ورزشکار}) \cdot P(\text{پسر}) + P(\text{دختر | ورزشکار}) \cdot P(\text{دختر}) = P(\text{ورزشکار})$$

اگر فرض کنیم احتمال دختر بودن، α باشد، آن‌گاه داریم:



$$\frac{2}{10} \times \alpha + \frac{4}{10} (1-\alpha) = \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{2}{10} \alpha = \frac{1}{4} - \frac{4}{10}$$

$$\frac{2}{10} \alpha = \frac{8-5}{20} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{دختران ۳ برابر پسران هستند.}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵

با توجه به قانون احتمال کل و یا به کمک نمودار درختی داریم:

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{16}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 مضرب ۳ مضرب ۳ نباشد

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{5}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶

اگر پیشامد قبولی علی در ریاضی را A و پیشامد قبولی او در فیزیک را B بنامیم، آن گاه $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cup B) = \frac{11}{24}$. بنابراین:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{11}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

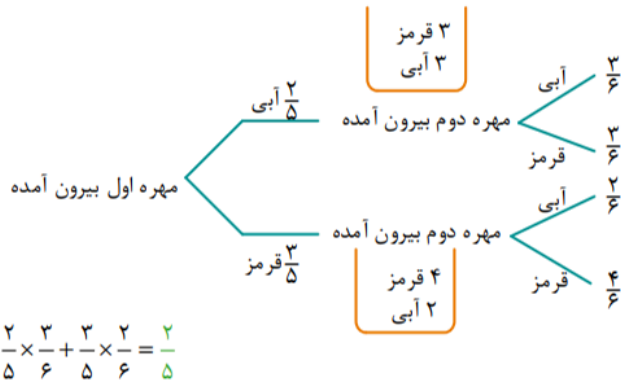
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

بنابراین احتمال قبولی علی در ریاضی به شرط قبولی او در فیزیک برابر است با:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷

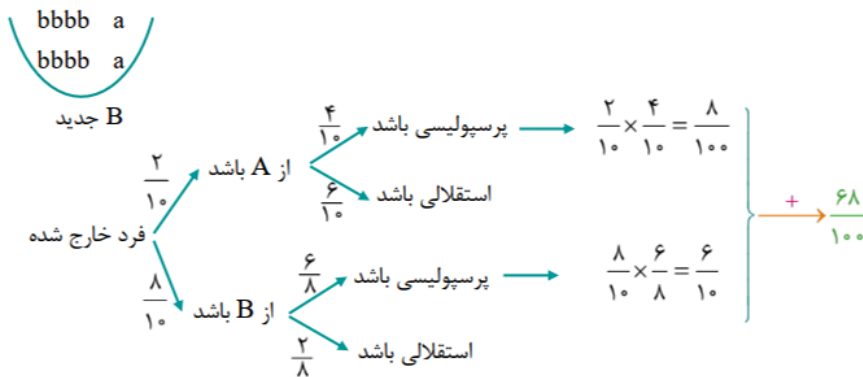
مطابق نمودار درختی زیر، احتمال آبی بودن مهره دوم برابر است با:



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸

پس از ورود دو نفر از کلاس A به کلاس B، وضعیت کلاس B به صورت زیر است که در آن ۲ نفر از کلاس A و ۸ نفر از کلاس B می‌باشند. حال یک نفر از کلاس خارج می‌شود:



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹

برداشتن هر یک از مهره‌ها نسبت به هم مستقل می‌باشند.

$$P(\text{هر دو سبز باشند}) = P + P(\text{هر دو زرد باشند}) = P(\text{هم‌رنگ بودن})$$

$$= \left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{n+3}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{n}{n+3}\right) = \frac{52/5}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{6+3n}{5(n+3)} = \frac{52/5}{100} \Rightarrow \frac{6+3n}{n+3} = \frac{52/5}{20}$$

$$\Rightarrow 120 + 60n = 52/5n + 157/5 \Rightarrow 7/5n = 37/5 \Rightarrow 7n = 37 \Rightarrow n = 5$$

$$P(\text{هر دو سبز}) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{40} = \frac{15}{100}$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰

با توجه به اینکه واریانس داده‌های کمتر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم و بین آن‌ها صفر است، داده‌های داخل هر یک از سه دسته با هم برابرند.

$$\begin{array}{ccc} \text{aaaaa} & \text{bbbbbbbbb} & \text{ccccc} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_1 & & Q_3 \end{array}$$

$$Q_3 - Q_1 = 2 \Rightarrow \frac{b+c}{2} - \frac{a+b}{2} = 2 \Rightarrow \frac{c-a}{2} = 2 \Rightarrow c-a = 4 \quad (1)$$

$$Q_2 = \frac{Q_1 + Q_3}{2} \Rightarrow b = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2}}{2} \Rightarrow b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow 2b = a+c$$

$$\bar{x} = 8 \Rightarrow \frac{5a + 10b + 5c}{20} = 8 \Rightarrow 2b + a + c = 32 \Rightarrow 2(a+c) = 32 \Rightarrow a+c = 16 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow c = 10$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱

راه حل اول:

نکته: دو پیشامد A و B را مستقل می‌نامیم هرگاه وقوع هریک، بر وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر، برای دو پیشامد

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \text{مستقل A و B داریم:}$$

باید احتمال پیشامد «هر ۴ فرزند پسر یا هر ۴ فرزند دختر باشند» را محاسبه کنیم. احتمال این پیشامد با توجه به مستقل بودن جنسیت هر فرزند نسبت به فرزندان قبل و بعد از خود، برابر است با:

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}_{\text{هر ۴ فرزند پسر}} + \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}_{\text{هر ۴ فرزند دختر}} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

راه حل دوم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \text{نکته: احتمال پیشامد A در فضای نمونه‌ای S برابر است با:}$$

$$n(S) = 2^4 = 16 \quad \text{تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:}$$

پیشامد «یکسان بودن جنسیت همه فرزندان» عبارت است از:

$$A = \{(پ, پ, پ, پ), (د, د, د, د)\}$$

بنابراین احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز در یک ردیف کنار هم برابر است با:

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

نکته: احتمال پیشامد A در فضای نمونه‌ای S برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

حروف کلمه «جهان‌گردی» عبارت است از: «ج-ه-ا-ن-گ-ر-د-ی»

این حروف $8!$ جایگشت دارند، پس:

$$n(S) = 8!$$

در صورتی که بخواهیم کلمه با جهان شروع شود، ۴ حرف اول ۱ حالت دارند، ولی ۴ حرف بعدی $4!$ جایگشت دارند. بنابراین:

$$n(A) = 4!$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4!}{8!}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب انتخاب سه نقطه برای تشکیل مثلث}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن برای انتخاب سه نقطه از ۸ نقطه}} = \frac{\binom{8}{3} - 4 \times \binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56 \\ \binom{3}{3} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow P(A) = \frac{56 - 4}{56} = \frac{52}{56} = \frac{13}{14}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴

نکته: دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند، هرگاه: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه A و B' هم مستقل از هم هستند، یعنی:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$$

با توجه به نکات بالا داریم:

$$P(B|A) = 0/7 \xrightarrow{A \text{ و } B \text{ مستقل‌اند}} P(B) = 0/7 \Rightarrow P(B') = 1 - 0/7 = 0/3$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = P(A) + P(B') - P(A) \cdot P(B') = 0/4 + 0/3 - 0/4 \times 0/3 = 0/7 - 0/12 = 0/58$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۵

نکته (احتمال یک پیشامد): اگر A پیشامدی در فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه احتمال رخداد پیشامد A را با $P(A)$ نمایش داده و برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$n(A)$: تعداد اعضای پیشامد A

$n(S)$: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

مهره‌های ۲، ۳، ۵، ۷، مهره‌هایی با شماره اول و مهره‌های ۱، ۴، ۶، ۸، ۹، مهره‌هایی با شماره غیر اول هستند. مطابق با اطلاعات مسئله باید در میان ۴ مهره خارج شده، ۲، ۳ یا ۴ مهره با شماره اول باشد، پس داریم:

$$n(S) = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \times 5!} = 126$$

$$n(A) = \binom{4}{2} \binom{5}{2} + \binom{4}{3} \binom{5}{1} + \binom{4}{4} = 60 + 20 + 1 = 81$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{81}{126} = \frac{9}{14}$$

با توجه به نکته، خواهیم داشت:

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۶

نکته (احتمال یک پیشامد): اگر A پیشامدی در فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه احتمال رخداد پیشامد A را با $P(A)$ نمایش داده و برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$n(A)$: تعداد اعضای پیشامد A

$n(S)$: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

در پرتاب دو تاس، فضای نمونه‌ای $6 \times 6 = 36$ عضو دارد.

برای آنکه عددی مضرب ۶ باشد، باید زوج باشد و بر ۳ بخش پذیر باشد، پس اعداد مجموعه زیر مطلوب هستند:

$$A = \{12, 24, 42, 36, 54, 66\}$$

$$n(A) = 6, \quad n(S) = 36 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: منظور از «احتمال A به شرط B» که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آن که بدانیم پیشامد B رخ داده است.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نکته: مستقل بودن A از B معادل است با اینکه:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، A' و B' و همچنین A, B' و نیز A', B مستقل هستند.

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \quad \text{نکته}$$

از آنجایی که A و B مستقل از یکدیگرند، پس A' و B هم مستقل از هم هستند و داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (*)$$

$$P(B \cap A') = P(B) \times P(A') \quad (**)$$

با توجه به نکات و اطلاعات مسئله، داریم:

$$P(B|A') = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{3}{4} \xrightarrow{(**)} \frac{P(B) \times P(A')}{P(A')} = \frac{3}{4} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{4}$$

و در نهایت خواهیم داشت:

$$\frac{P(A - B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} \stackrel{(*)}{=} \frac{P(A) - P(A) \times P(B)}{P(A)} = \frac{P(A)(1 - P(B))}{P(A)} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: احتمال اینکه هیچ‌یک از پیشامدهای A و B رخ ندهند را با $P(A' \cap B')$ نمایش داده و برابر است با:

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

نکته: منظور از «احتمال A به شرط B» که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آن که بدانیم پیشامد B رخ داده است.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

با توجه به نکات داریم:

$$\frac{7}{15} = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

بنابراین:

$$P(A|B) + P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{11}{10} = 1.1$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۹

نکته: منظور از «احتمال A به شرط B» که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آن که بدانیم پیشامد B رخ داده است.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

اگر A را پیشامد آن که مجموع اعداد رو شده دو تاس ۵ یا ۸ باشد در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$A = \{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2), (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\} \Rightarrow n(A) = 9$$

اگر پیشامد آن که هر دو عدد رو شده زوج نباشند را B بنامیم، آنگاه:

$$A \cap B = \{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2), (3,5), (5,3)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 6$$

احتمال اینکه هر دو عدد رو شده زوج نباشند به شرط اینکه مجموع آن‌ها ۵ یا ۸ باشد، معادل $P(B|A)$ است که با توجه به نکته برابر است با:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

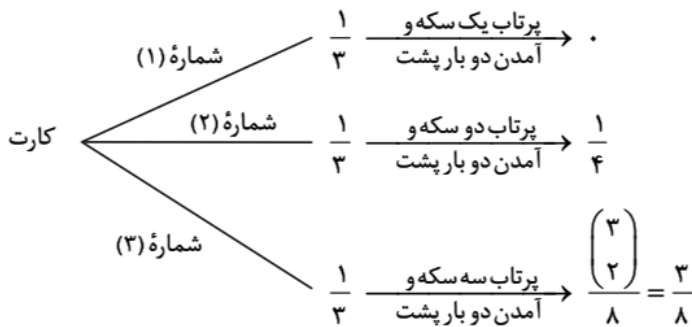
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۰

نکته: اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

به کمک نمودار درختی و با توجه به قانون احتمال کل، داریم:



و در نهایت، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

دقت کنید در پرتاب سه سکه، برای محاسبه احتمال دقیقاً ۲ بار پشت ظاهر شدن سکه، باید دو سکه‌ای که قرار است پشت ظاهر شوند را

انتخاب کنیم، که تعداد آن برابر $\binom{3}{2}$ است.

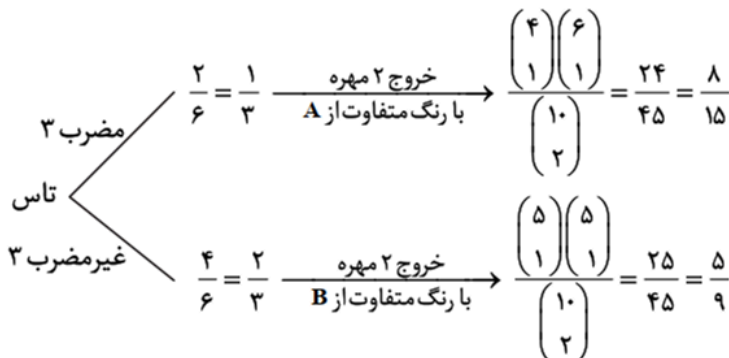
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۱

نکته: اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)$$

به کمک نمودار درختی و با توجه به قانون احتمال کل، داریم:



و در نهایت خواهیم داشت:

$$\frac{1}{3} \times \frac{8}{15} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{9} = \frac{8}{45} + \frac{10}{27} = \frac{74}{135}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۲

نکته: احتمال رخداد پیشامد A در فضای نمونه‌ای S را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم که برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}}$$

نکته: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در یک خانواده n فرزندی برابر 2^n است.



تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در یک خانواده با ۵ فرزند برابر 2^5 است.

برای آنکه فرزند پنجم دومین پسر خانواده باشد، می‌بایست فقط یکی از ۴ فرزند قبلی پسر باشد. داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}}{2^5} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

باید این پنج نفر روی شش صندلی بنشینند:

۵۳

$$n(S) = P(6, 5) = \frac{6!}{(6-5)!} = 6!$$

حالت مورد نظر ما این است که روی صندلی‌های متوالی (۱ تا ۵ یا ۲ تا ۶) بنشینند و بچه‌ها کنار هم باشند:

$$\boxed{\text{ف ف ف}} \Rightarrow \text{پدر, مادر, } \downarrow \text{ صندلی‌ها} \Rightarrow n(A) = 2(3!)(3!)$$

پس داریم:

$$P(A) = \frac{2(3!)(3!)}{6!} = \frac{2(3!)}{6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{10}$$

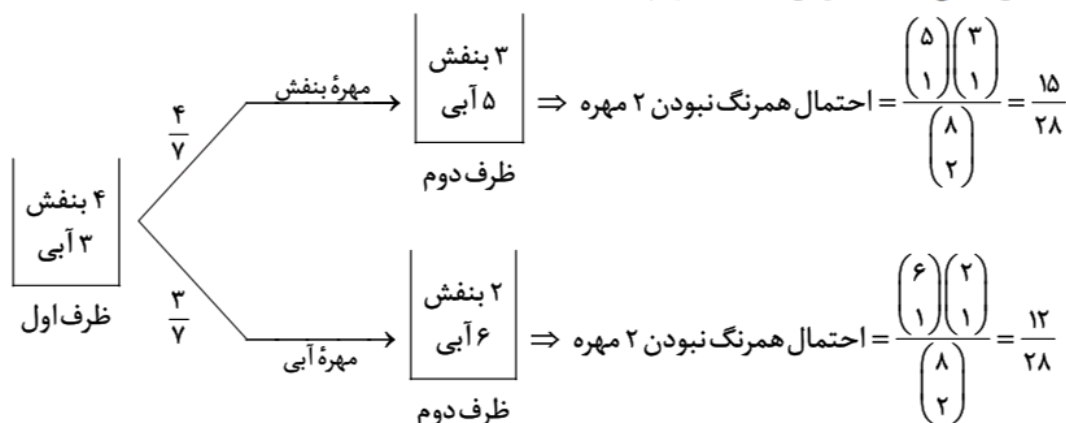
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: فرض کنیم $A_1, A_2, \dots, A_n$ ، پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

۵۴

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B | A_i)$$

مهره اول خارج شده از ظرف اول، بنفش یا آبی است، بنابراین ۲ حالت داریم:



$$P(\text{هم‌رنگ نبودن ۲ مهره نهایی}) = \frac{4}{7} \times \frac{15}{28} + \frac{3}{7} \times \frac{12}{28} = \frac{60 + 36}{196} = \frac{96}{196} = \frac{24}{49}$$

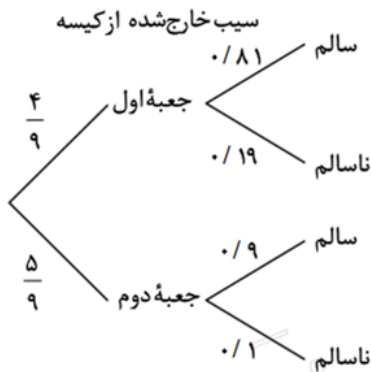
طبق قانون احتمال کل داریم:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۵

نکته: اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)$$



در کیسه، ۴ سیب از جعبه اول و ۵ سیب از جعبه دوم وجود دارد، پس احتمال آنکه سیب خارج شده از کیسه، مربوط به جعبه اول باشد برابر $\frac{4}{9}$ و احتمال اینکه مربوط به جعبه دوم باشد، برابر با $\frac{5}{9}$ است.

بنابراین احتمال آنکه سیب خارج شده از کیسه ناسالم باشد، برابر است با:

$$P = \frac{4}{9} \times \frac{1}{19} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{171} + \frac{5}{81} = \frac{4}{171} + \frac{10}{162} = \frac{8}{162} + \frac{10}{162} = \frac{18}{162} = \frac{1}{9}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۶

$$\text{نکته: } P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\text{نکته: } P(A \cap B') = P(A - B)$$

$$\text{نکته: } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

ابتدا $P(A')$ و $P(B')$ را به دست می‌آوریم:

$$P(A) = 1/5 \Rightarrow P(A') = 1 - 1/5 = 4/5$$

$$P(B) = 1/4 \Rightarrow P(B') = 1 - 1/4 = 3/4$$

اکنون داریم:

$$P(A | B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{P(A \cap B')}{3/4} \Rightarrow P(A \cap B') = 2/3 \times 3/4 = 1/2$$

از طرفی می‌دانیم:

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow 1/2 = 1/5 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1/5 - 1/2 = -1/10$$

بنابراین:

$$P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 1/4 - (-1/10) = 1/4 + 1/10 = 3/20$$

حال خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$P(B | A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{3/20}{4/5} = \frac{3}{16}$$

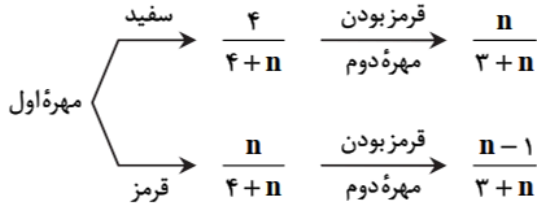
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: اگر فرض کنیم $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده‌اند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)$$

راه حل اول:

با توجه به قانون احتمال کل و رسم نمودار درختی داریم:



$$\Rightarrow P(\text{قرمز بودن مهره دوم}) = \frac{4}{4+n} \times \frac{n}{3+n} + \frac{n}{4+n} \times \frac{n-1}{3+n} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{4n}{(4+n)(3+n)} + \frac{n^2 - n}{(4+n)(3+n)} = \frac{3n + n^2}{(4+n)(3+n)} = \frac{n(3+n)}{(4+n)(3+n)} = \frac{n}{4+n} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3n = 4+n \Rightarrow n = 2$$

راه حل دوم:

نکته: اگر با چشم بسته مهره‌ای از ظرفی خارج کنیم و کنار بگذاریم و سپس مهره جدیدی از ظرف خارج کنیم، احتمال رسیدن به هر حالتی مانند آن است که هیچ مهره‌ای از کیسه خارج نشده است. چون با چشم بسته مهره‌ای از جعبه خارج کرده‌ایم و سپس مهره جدید را خارج می‌کنیم، آنگاه:

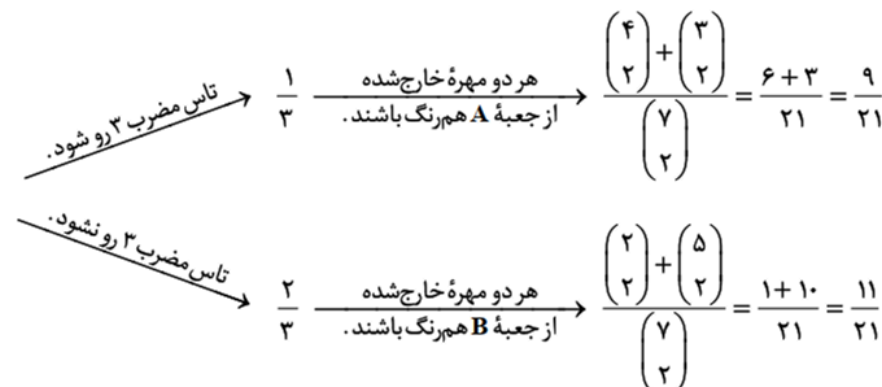
$$P(\text{قرمز بودن مهره}) = \frac{n}{n+4} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3n = n+4 \Rightarrow n = 2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)$$

در پرتاب یک تاس، احتمال این که عدد رول شده مضرب ۳ یعنی ۳ یا ۶ باشد، برابر $\frac{2}{6}$ یا همان $\frac{1}{3}$ است. اکنون با رسم نمودار درختی داریم:



$$\frac{1}{3} \times \frac{9}{21} + \frac{2}{3} \times \frac{11}{21} = \frac{9}{63} + \frac{22}{63} = \frac{31}{63}$$

پس احتمال خواسته شده برابر است با:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و $A \subseteq S$ یک پیشامد در فضای S باشد، احتمال رخداد پیشامد A یعنی $P(A)$ به صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف می‌شود.

نکته: یک تابع از مجموعه A به مجموعه B ، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

می‌دانیم برای ساخت یک تابع از مجموعه A به مجموعه B ، باید به هر عضو A دقیقاً یک عضو B را نسبت دهیم. بنابراین برای هر عضو A ، ۴ انتخاب در مجموعه B داریم. پس طبق اصل ضرب فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$\text{تعداد توابع از مجموعه } A \text{ به مجموعه } B = \frac{4}{\text{عضو ۱}} \times \frac{4}{\text{عضو ۲}} \times \frac{4}{\text{عضو ۳}} = 4^3 \Rightarrow n(S) = 4^3$$

اگر پیشامد خواسته‌شده را C در نظر بگیریم، تعداد اعضای مجموعه C را به دست می‌آوریم و داریم: $f(1) > 5$ است، پس $f(1) = 6$ یا $f(1) = 7$. پس برای عضو «۱» از مجموعه A دو انتخاب در مجموعه B وجود دارد.

از طرفی قرار است $f(3) + f(2) = 11$ باشد، پس باید یکی از دو حالت زیر رخ دهد:
حالت اول: $f(2) = 4$ و $f(3) = 7$ یا $f(2) = 7$ و $f(3) = 4$.

$$\text{تعداد توابع با شرط بالا} = \frac{2}{\text{عضو ۱}} \times \frac{2}{\text{عضو ۲}} \times \frac{1}{\text{عضو ۳}} = 4$$

حالت دوم: $f(2) = 5$ و $f(3) = 6$ یا $f(2) = 6$ و $f(3) = 5$.

$$\text{تعداد توابع با شرط بالا} = \frac{2}{\text{عضو ۱}} \times \frac{2}{\text{عضو ۲}} \times \frac{1}{\text{عضو ۳}} = 4$$

بنابراین تعداد حالات مطلوب، $n(C) = 8$ است، پس:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{8}{4^3} = \frac{1}{8}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم. تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

نکته: اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و $A \subseteq S$ یک پیشامد در فضای S باشد، احتمال رخداد پیشامد A یعنی $P(A)$ به صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف می‌شود.

در جعبه ۱۰ مهره وجود دارد و می‌خواهیم ۴ مهره انتخاب کنیم. بنابراین:

$$n(S) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

قرار است فقط یک مهره آبی و حداکثر یک مهره سبز باشد. یعنی مهره سبز انتخاب نشود یا یک مهره سبز انتخاب شود، پس تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$n(A) = \binom{3}{1} \left[\binom{3}{3} + \binom{4}{1} \binom{3}{2} \right] = 3 \times (1 + 4 \times 3) = 39$$

$\downarrow$ مهره آبی $\downarrow$ مهره قرمز $\downarrow$ مهره آبی $\downarrow$ مهره قرمز
 ۱ مهره آبی ۳ مهره قرمز ۱ مهره سبز ۲ مهره قرمز

پس احتمال مورد نظر برابر است با:

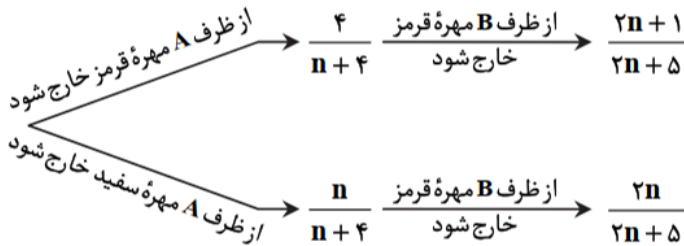
$$P(A) = \frac{39}{210} = \frac{13}{70}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)$$

اگر A پیشامد موردنظر باشد، با توجه به قانون احتمال کل داریم:



اکنون داریم:

$$P(A) = \left(\frac{4}{n+4}\right)\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right) + \left(\frac{n}{n+4}\right)\left(\frac{2n}{2n+5}\right) = \frac{17}{26}$$

$$\Rightarrow \frac{8n+4+2n^2}{2n^2+13n+20} = \frac{17}{26} \Rightarrow 18n^2 - 13n - 236 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=4 & \checkmark \\ n=-\frac{59}{18} & \times \end{cases}$$

تذکر: با توجه به گزینه‌ها، می‌توان جواب طبیعی معادله $18n^2 - 13n - 236 = 0$ را به دست آورد. بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: $P(A') = 1 - P(A)$

نکته: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه A', B' و A, B' و B, A' نیز مستقل هستند. ابتدا داریم:

$$P(A') + P(B') = \frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow 1 - P(A) + 1 - P(B) = \frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) = \frac{5}{6}$$

اکنون خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$P(A|B') + P(B|A') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} + \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(A) \cdot P(B')}{P(B')} + \frac{P(B) \cdot P(A')}{P(A')} = P(A) + P(B) = \frac{5}{6}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۳

نکته: احتمال A به شرط B یعنی $P(A|B)$ به صورت روبه‌رو است: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

نکته: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

اگر احتمال مردودی در درس ریاضی را با $P(A)$ و احتمال مردودی در درس فیزیک را با $P(B)$ نشان دهیم، داریم:

$$P(A) = \frac{20}{100} = 0.2 \text{ و } P(B) = \frac{25}{100} = 0.25 \text{ و } P(B|A) = 0.4$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.4 = \frac{P(A \cap B)}{0.2} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.08$$

احتمال آنکه دانش‌آموزی حداقل در یکی از دو درس مردود شده باشد، برابر با $P(A \cup B)$ است:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.25 - 0.08 = 0.37$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۴

نکته: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

نکته: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

نکته: $(A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'$

اگر احتمال اینکه ایمان به مشهد برود برابر $P(A)$ و احتمال اینکه نگار به مشهد برود برابر $P(B)$ باشد، داریم:

$$P(A) = 0.4, P(B) = 0.5, P(B|A) = 0.7$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow 0.7 = \frac{P(B \cap A)}{0.4} \Rightarrow P(B \cap A) = 0.28$$

بنابراین:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = 0.4 + 0.5 - 0.28 = 0.62$$

از طرفی:

اکنون احتمال خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A \cup B)'}{P(B')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - 0.62}{1 - 0.5} \Rightarrow P(A'|B') = \frac{0.38}{0.5} = 0.76$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۵

نکته: اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده‌اند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن «قانون احتمال کل» می‌گوییم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B | A_i)$$

$$n(S) = 36$$

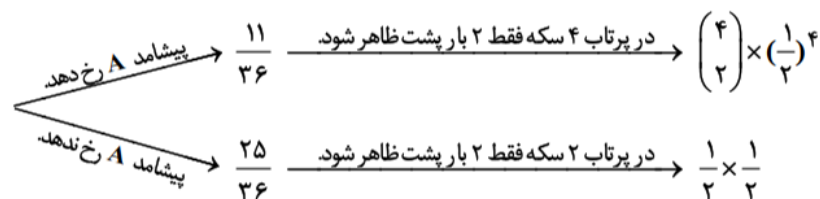
در پرتاب دو تاس فضای نمونه‌ای ۳۶ عضو دارد، پس:

ابتدا پیشامد این را که در پرتاب دو تاس، مجموع اعداد روشده ۵ یا عدد هر دو تاس اول باشد، به دست می‌آوریم و آن را A می‌نامیم:

$$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (2,2), (2,5), (3,3), (3,5), (5,2), (5,3), (5,5)\}$$

$$\Rightarrow n(A) = 11 \Rightarrow P(A) = \frac{11}{36}$$

اکنون احتمال خواسته شده را $P(B)$ می‌نامیم و داریم:



پس طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(B) = \frac{11}{36} \times \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{25}{36} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{36} \times \frac{6}{16} + \frac{25}{36} \times \frac{1}{4} = \frac{83}{288}$$

(دقت کنید که در پرتاب ۴ سکه، ابتدا باید ۲ سکه‌ای را که قرار است پشت ظاهر شوند، انتخاب شوند.)

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۶

نکته: احتمال رخداد پیشامد A در فضای نمونه‌ای S برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

تعداد کل حالات برابر تعداد راه‌های انتخاب ۴ نقطه از بین ۱۶ نقطه است.

$$n(S) = \binom{16}{4} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{4 \times 3 \times 2} = 2 \times 5 \times 14 \times 13 = 140 \times 13$$

برای شمارش تعداد حالات مطلوب، ابتدا از سطر اول یک نقطه را انتخاب می‌کنیم. این عمل ۴ حالت دارد. سپس از سطر دوم نقطه‌ای را انتخاب می‌کنیم که نباید با نقطه سطر اول در یک ستون قرار گیرد، پس ۳ حالت دارد و به همین ترتیب برای سطرهای بعدی ادامه می‌دهیم. بنابراین:

$$n(A) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4 \times 3 \times 2}{140 \times 13} = \frac{6}{35 \times 13} = \frac{6}{455}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۷

$$\text{نکته: } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

فضای نمونه پرتاب همزمان این دو تاس عبارت است از:

$$S = \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6)\}$$

همچنین پیشامد آنکه مجموع دو تاس عددی فرد باشد، عبارت است از:

$$A = \{(1,4), (1,6), (2,5), (3,4), (3,6)\}$$

بنابراین احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{9}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۸

تعداد جایگشت‌های کل این ۷ گوی برابر ۷! است. برای شمردن تعداد حالت‌های مطلوب، یعنی حالت‌هایی که همه اعداد زوج پشت سر هم خارج شوند، فرض می‌کنیم همه اعداد زوج، در یک بسته قرار گرفته‌اند. این کار ۳! حالت دارد. حال بسته اعداد زوج با ۴ رقم فرد دیگر ۵! جایگشت دارند، پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5! \times 3!}{7!} = \frac{3! \times 5!}{7 \times 6 \times 5!} = \frac{1}{7}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۹

می‌دانیم مجموع اعداد رو شده ۱۲، ۹، ۶، ۳ نیست. یعنی باید حالت‌های زیر را از فضای نمونه کنار بگذاریم:

$$\{(1,2), (1,5), (2,1), (2,4), (3,3), (3,6), (4,2), (4,5), (5,1), (5,4), (6,3), (6,6)\}$$

پس تعداد اعضای فضای نمونه جدید برابر $n(S_{\text{new}}) = 36 - 12 = 24$ است.

در این فضای نمونه جدید، پیشامد ظاهر شدن مجموع دو عدد مضرب ۴ به صورت زیر است:

$$A = \left\{ \underbrace{(1,3), (2,2), (3,1)}_{\text{مجموع ۴}}, \underbrace{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)}_{\text{مجموع ۸}} \right\} \Rightarrow n(A) = 8$$

$$P = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

پس احتمال موردنظر برابر است با:

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۰

پله اول: با توجه به تعریف پیشامد مستقل و شرطی داریم:

$$P(A|B) = P(B) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(B) \xrightarrow[\text{مستقل}]{B,A} \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(B)$$

در نتیجه $P(A) = P(B)$

پله دوم: احتمال اینکه هر دو پیشامد رخ دهد برابر $P(A \cap B)$ می‌باشد:

$$P(A \cap B) = \frac{4}{9} \xrightarrow[\text{مستقل}]{B,A} P(A) \times P(B) = \frac{4}{9} \xrightarrow{P(A)=P(B)} P(A)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3} = P(B)$$

پله سوم: $P(A - B)$ را حساب می‌کنیم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \xrightarrow[\text{مستقل}]{B,A} P(A) - P(A) \times P(B) = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۱

ابتدا اعداد دو رقمی مضرب ۵ که مضرب ۲ و ۳ نباشند رو می‌نویسیم.

تعداد کل حالت‌ها برابر $\binom{6}{3} = 20$ است.

اگر بخواهیم تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد انتخاب شده ۶۰ واحد باشد داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \times 2}{20} = 0/3$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۲

می‌دانیم مجموع اعداد رو شده ۳، ۶، ۹، ۱۲ نیست. یعنی باید حالت‌های زیر را از فضای نمونه کنار بگذاریم:

$$\{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\}$$

پس تعداد اعضای فضای نمونه جدید برابر $n(S_{\text{new}}) = 36 - 12 = 24$ است.

در این فضای نمونه جدید، پیشامد ظاهر شدن مجموع دو عدد مضرب ۴ به صورت زیر است:

$$A = \left\{ \underbrace{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)}_{\text{مجموع ۴}}, \underbrace{(4, 2), (5, 1), (6, 3)}_{\text{مجموع ۸}} \right\} \Rightarrow n(A) = 8$$

پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$P = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۳

پیشامد قبولی در آزمون اول را A و در آزمون دوم را با B نمایش می‌دهیم. پس:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0/7 = \frac{P(A \cap B)}{0/2} \Rightarrow P(A \cap B) = 0/14$$

$$P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - (0/2 + 0/22 - 0/14)}{1 - 0/2} = \frac{0/22}{0/8} = 0/9$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۴

 A و B مستقل‌اند، پس: $P(A|B) = P(A)$ از طرفی طبق فرض سوال $P(A|B) = P(B)$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت: $P(A) = P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{4}{9} \xrightarrow{P(A)=P(B)} P^2(A) = \frac{4}{9} \rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A) - P^2(A) = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

با توجه به جدول اعداد رو شده در دو تاس داریم:

۷۵

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱			✓		✓	
۲		○		○		○
۳	✓		✓		✓	○
۴		○		○	○	○
۵	✓		✓	○	✓	
۶		○	○	○		○

حالت هایی که در آن حاصل جمع دو عدد رو شده عددی اول نیست را با ○ و از بین آنها حالت هایی که حاصل ضرب دو عدد رو شده مضرب ۲ نیست را با ✓ نشان می دهیم. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P = \frac{8}{21}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ابتدا پیشامدهای A و B را به دست می آوریم:

۷۶

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - \frac{P(A \cap B)}{0/5} = 0/2 \Rightarrow P(A) = 0/7$$

$$P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - \frac{P(A \cap B)}{0/5} = 0/1 \Rightarrow P(B) = 0/6$$

چون $P(A).P(B) \neq P(A \cap B)$ است، پس A و B مستقل نیستند. بنابراین:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0/5}{0/6} = \frac{5}{6} = 0/83$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

با توجه به نمودار درختی داریم:

۷۷

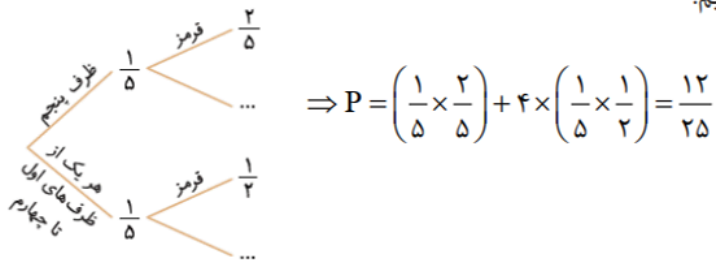
$$P = \frac{1}{2} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{6}{21} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{36} = \frac{1}{7} + \frac{1}{24} = \frac{31}{168}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۸

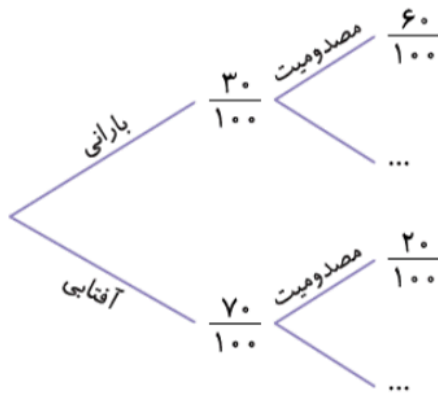
چون تعداد مهره‌های قرمز و آبی در ۴ ظرف برابر است، احتمال انتخاب مهره قرمز از هر کدام از آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است. پس یکی از این ۴ ظرف را بررسی می‌کنیم و جواب آن شاخه را در ۴ ضرب می‌کنیم:



(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۹

۳۰ درصد روزها بارانی و ۷۰ درصد روزها آفتابی است، پس:

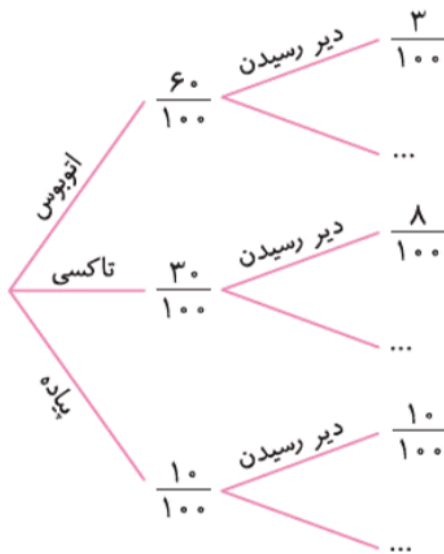


$$P = \frac{30}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{70}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{18}{100} + \frac{14}{100} = \frac{32}{100} = \frac{8}{25}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۰

با توجه به نمودار درختی زیر داریم:

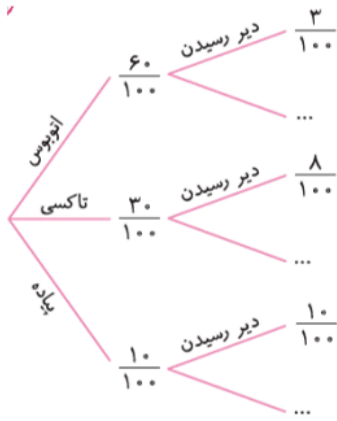


$$P = \frac{60}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{8}{100} + \frac{10}{100} \times \frac{10}{100} = \frac{52}{1000} = 0.052$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۱

با توجه به نمودار درختی زیر داریم:



$$P = \frac{60}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{8}{100} + \frac{10}{100} \times \frac{10}{100} = \frac{52}{1000} = 0.052$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۲

برای این که هیچ دو پسری کنار هم نباشند، دخترها و پسرها باید به صورت یکی در میان قرار گیرند.

$$\text{پسر دختر پسر دختر پسر دختر} \Rightarrow 3! \times 4!$$

اما برای این که هیچ دو دختری کناری هم نباشند، باید بین پسرها جای خالی در نظر بگیریم از بین ۵ جای خالی ایجاد شده، ۳ تا را برای دخترها انتخاب کنیم:

$$\text{پسر} _ \text{پسر} _ \text{پسر} _ \text{پسر} _ \text{پسر} \Rightarrow \binom{5}{3} \times 3! \times 4!$$

پس نسبت تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\frac{3! \times 4!}{\binom{5}{3} \times 3! \times 4!} = \frac{1}{10}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۳

در پرتاب دو تاس، پیشامد این که حاصل ضرب اعداد رو شده، مضرب ۳ باشد را A و پیشامد این که مجموع اعداد رو شده برابر ۶ باشد را B در نظر می‌گیریم. سوال از ما $P(A - B)$ را می‌خواهد.

می‌دانیم $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ است.

در ضمن برای این که حاصل ضرب اعداد رو شده مضرب ۳ باشد، باید حداقل یکی از تاس‌ها مضرب ۳ بیاید؛ که متمم حالتی است که هیچ کدام از تاس‌ها مضرب ۳ نیاید، پس:

$$P(A) = 1 - \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{9}$$

از طرفی $A \cap B = \{(3, 3)\}$ است، پس:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{9} - \frac{1}{36} = \frac{19}{36}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۴

$$\begin{aligned} \text{احتمال انتخاب دانش آموزان مدرسه B} &= x \\ \text{احتمال انتخاب دانش آموزان مدرسه A} &= \frac{3}{2}x \end{aligned} \rightarrow x + \frac{3}{2}x = 1 \rightarrow \frac{5}{2}x = 1 \rightarrow x = \frac{2}{5} \rightarrow \begin{cases} P(B) = \frac{2}{5} \\ P(A) = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$P(\text{قبولی}) = \left(\frac{3}{5} \times \frac{60}{100} \right) + \frac{2}{5} \left(\frac{70}{100} \right) = \frac{320}{500} = \frac{16}{25}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۵

متمم حداقل یک عدد مضرب ۳ باشد برابر است با: هیچ عددی مضرب ۳ نباشد. بنابراین ۳ و ۶ را از تاس‌ها حذف کرده و $4 \times 4 = 16$ حالت می‌شود، بنابراین از ۳۶ حالت در ۱۶ حالت هیچ عددی مضرب ۳ نیست. در ۲۰ حالت حداقل یکی از اعداد مضرب ۳ است.

$$n(A) = \frac{20}{36} \rightarrow \text{حداقل یک عدد مضرب ۳} = \text{پیشامد A}$$

$$\{ (1,2)(2,1)(2,3)(3,2)(3,4)(4,3)(4,5)(5,4)(5,6)(6,5) \} \rightarrow n(B) = \frac{10}{36}$$

$$A \cap B = \{ (2,3)(3,2)(3,4)(4,3)(5,6)(6,5) \} \rightarrow n(A \cap B) = \frac{6}{36}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \frac{20}{36} + \frac{10}{36} - \frac{6}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۶

پاسخ تشریحی **گام اول:** در مجموع $4 + 5 = 9$ دانش‌آموز قرار است در یک ردیف کنار هم بایستند و این ۹ دانش‌آموز به ۹! حالت می‌توانند جایگشت داشته باشند؛ پس فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی $n(S) = 9!$ حالت دارد.

گام دوم: برای آن‌که کلاس‌اولی‌ها یکی‌درمیان باشند، مطابق شکل زیر، ابتدا کلاس‌اولی‌ها به ۵! حالت در یک ردیف قرار می‌گیرند و سپس در فضای خالی بین هر دو نفر یک نفر کلاس‌دومی قرار می‌گیرد و کلاس‌دومی‌ها نیز در این فضاهای خالی به ۴! حالت می‌توانند جایگشت کنند. توجه کنید که چون تعداد کلاس‌اولی‌ها یک نفر بیشتر است، باید نفر اول و آخر کلاس‌اولی باشد.

اولی دومی اولی دومی اولی دومی اولی دومی اولی

طبق اصل ضرب، تعداد حالت‌ها برابر با $n(A) = 5! \times 4!$ است.

گام سوم: در حالتی که بخواهیم هیچ دو کلاس‌دومی کنار هم نباشند، ابتدا دوباره کلاس‌اولی‌ها را به ۵! حالت در یک ردیف می‌چینیم؛ سپس مطابق شکل زیر، در جاهای خالی کلاس‌دومی‌ها را قرار می‌دهیم. برای اولین نفر آن‌ها ۶ جای خالی، برای بعدی ۵ جای خالی، بعدی ۴ جای خالی و برای آخرین نفر ۳ جای خالی وجود خواهد داشت. به این ترتیب، هیچ دو کلاس‌دومی کنار هم قرار نخواهند گرفت.

اولی اولی اولی اولی اولی اولی

طبق اصل ضرب، تعداد حالت‌ها برابر با $n(B) = 5! \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$ است.

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{\frac{5! \times 4!}{9!}}{\frac{5! \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{9!}} = \frac{1}{15}$$

گام چهارم: خواسته سؤال $\frac{P(A)}{P(B)}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۷

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا توجه کنید که نسبت احتمال‌های دو پیشامد در این آزمایش تصادفی برابر با نسبت تعداد اعضای آن پیشامدهاست. **گام دوم:** مطابق درس‌نامه، تعداد اعضای پیشامد آن که مجموع دو عدد رو شده ۳ باشد، برابر با ۲ است که سه برابر آن، برابر با ۶ می‌شود. طبق درس‌نامه، تنها در حالتی که مجموع دو عدد رو شده برابر با ۷ باشد، $n(A) = 6$ می‌شود، پس $k = 7$ است. **گام سوم:** تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در پرتاب دو تاس برابر با $n(S) = 6 \times 6 = 36$ است. **گام چهارم:** احتمال آن را حساب می‌کنیم که مجموع دو عدد رو شده $k + 3 = 7 + 3 = 10$ شود. طبق درس‌نامه $n(B) = 3$ است.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۸

می‌دانیم:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

حالاتی که مجموع دو تاس اول باشد، عبارتند از:

$$\{(1,1), (1,2), (1,4), (1,6), (2,3), (2,5), (3,4), (5,6)\}$$

از بین حالات بالا، در حالت‌های زیر اختلاف دو تاس کمتر یا مساوی ۱ است:

$$A \cap B = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,4), (5,6)\}$$

در بالا تمام حالات به جز $(1,1)$ دو بار شمرده می‌شوند، پس $n(B) = 15$ و $n(A \cap B) = 9$ بنابراین داریم:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۹

 $P(A)$ = احتمال قهرمانی تیم والیبال $P(B)$ = احتمال قهرمانی تیم فوتبال $P(B - A)$ = احتمال فقط قهرمانی تیم فوتبال $P(A|B)$ = احتمال قهرمانی تیم والیبال به شرط قهرمانی تیم فوتبال $P(A \cap B)$ = احتمال قهرمانی هر دو تیم = ۰/۱ $P(B - A) = P(A|B) + ۰/۲$

$$\Rightarrow P(B) - P(B \cap A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + ۰/۲ \Rightarrow x - ۰/۱ = \frac{۰/۱}{x} + ۰/۲ \xrightarrow{\times x} x^2 - ۰/۱x = ۰/۱ + ۰/۲x$$

$$\Rightarrow x^2 - ۰/۳x - ۰/۱ = ۰ \Rightarrow (x - ۰/۵)(x + ۰/۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} P(B) = x = ۰/۵ \\ P(B) = x = -۰/۲ \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$n(S) = P(5,4) + P(5,5) = 5! + 5! = 240$$

۴ یا ۵ تا از این پنج رقم را کنار هم قرار می‌دهیم، پس:

جمع این ۵ رقم برابر با ۱۶ است؛ پس هیچ‌یک از اعداد پنج‌رقمی مضرب ۳ نیست.

در اعداد چهاررقمی، اگر با ارقام ۲, ۳, ۴, ۶ بسازیم جمع ارقام برابر با ۱۵ و اگر از ارقام ۱, ۲, ۳, ۶ استفاده شود، مجموع ارقام برابر با ۱۲ است. پس:

$$n(A) = 2 \times 4! = 48$$

$$P(A) = \frac{48}{240} = \frac{1}{5}$$

و بنابراین:

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۰

۹۱

پاسخ تشریحی گام اول: تعداد کل حالت‌های ممکن برای نشستن ۸ نفر در یک ردیف برابر با $n(S) = 8!$ است.

گام دوم: حال پیشامد آن که هر فرد کنار همسر خود بنشینند را بررسی می‌کنیم. هر دو صندلی کنار هم را یک بسته در نظر می‌گیریم. ۴ زوج به ۴! در این بسته‌ها قرار می‌گیرند. از طرفی هر زوج در هر بسته به ۲! حالت جایگشت دارند، پس طبق اصل ضرب تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$n(A) = 4! \times 2! \times 2! \times 2! \times 2! = 4!(2!)^4$$

گام سوم: پس احتمال آن که هر فرد کنار همسر خود بنشینند برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4!(2!)^4}{8!} = \frac{4! \times 16}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!} = \frac{1}{105}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۲

پاسخ تشریحی گام اول: فضای نمونه‌ای را به حالتی که حاصل ضرب سه عدد رو شده عددی زوج باشد، محدود می‌کنیم. فضای نمونه‌ای جدید، متمم پیشامد آن است که حاصل ضرب هر سه عدد رو شده فرد باشد.

$n(S) =$ (تعداد حالت‌هایی که هر سه تاس فرد بیایند) - (تعداد کل حالت‌های پرتاب هم‌زمان سه تاس)

$$\Rightarrow n(S) = 6 \times 6 \times 6 - \underset{\text{فرد}}{3} \times \underset{\text{فرد}}{3} \times \underset{\text{فرد}}{3} = 3^3(2^3 - 1) = 3^3 \times 7$$

گام دوم: برای آن که مجموع اعداد رو شده عددی زوج باشد، یا باید هر سه عدد زوج باشد یا یکی از عددها زوج و دوتای دیگر فرد باشند.

$$n(A) = \underset{\text{زوج}}{3} \times \underset{\text{زوج}}{3} \times \underset{\text{زوج}}{3} + \underset{\text{زوج}}{3} \times \underset{\text{فرد}}{3} \times \underset{\text{فرد}}{3} + \underset{\text{زوج}}{3} \times \underset{\text{فرد}}{3} \times \underset{\text{فرد}}{3} = 3^3 + 3 \times 3^2 = 3^3(1 + 3) = 3^3 \times 4$$

انتخاب این‌که اولی یا دومی یا سومی زوج باشد.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3^3 \times 4}{3^3 \times 7} = \frac{4}{7}$$

گام سوم: احتمال پیشامد مطلوب را حساب می‌کنیم.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۳

پاسخ تشریحی گام اول: چون A و B دو پیشامد مستقل هستند، پس:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (1)$$

گام دوم: از طرفی داریم:

$$P(A - B) = P(A) - \underbrace{P(A \cap B)}_{(1): P(A) \cdot P(B)} = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) \quad (2)$$

گام سوم: (۱) و (۲) را در تساوی داده‌شده در صورت سؤال جای‌گذاری می‌کنیم:

$$2P(A - B) = P(A \cap B) \xrightarrow{(2), (1)} 2P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B)$$

$$\Rightarrow 2 - 2P(B) = P(B) \Rightarrow 2P(B) = 2 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{4} \quad (3)$$

گام چهارم: خواسته سؤال برابر است با:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \xrightarrow{(1)} P(B|A) = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = \underbrace{P(B)}_{(3): \frac{2}{4}} = \frac{2}{4}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۴

پاسخ تشریحی

گام اول: پیشامد آن که عدد اول ظاهر شود را A می‌نامیم.

$$A = \{2, 3, 5\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

گام دوم: پیشامد دوعضوی را B می‌نامیم و دو عضو انتخاب شده را a و b می‌نامیم.

$$B = \{a, b\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

گام سوم: چون دو پیشامد A و B مستقل هستند، شرط زیر برقرار است:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \xrightarrow{(2), (1)} P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \xrightarrow{n(S)=6} n(A \cap B) = 1$$

گام چهارم: پس A و B در یک عضو مشترک هستند؛ در نتیجه برای تشکیل پیشامد B ، باید یک عضو از مجموعه $\{2, 3, 5\}$ انتخاب کنیم که به $\binom{3}{1}$ حالت ممکن است و یک عضو هم از اعداد باقی‌مانده، یعنی $\{1, 4, 6\}$ که آن هم به $\binom{3}{1}$ حالت ممکن است. در نهایت طبق اصل

$$\binom{3}{1} \times \binom{3}{1} = 3 \times 3 = 9$$

ضرب تعداد حالت‌ها برابر است با:

یعنی ۹ پیشامد دوعضوی وجود دارد که از پیشامد «عدد اول ظاهر شود» مستقل است.

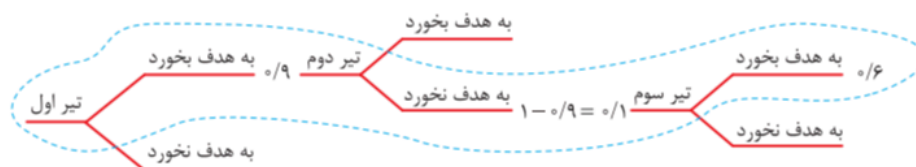
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۵

پاسخ تشریحی

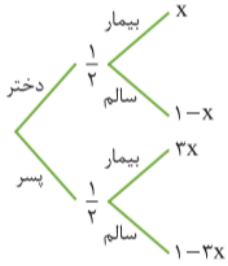
گام اول: با استفاده از نمودار درختی به سؤال پاسخ می‌دهیم و البته در این نمودار فقط حالت مورد نظر سؤال، یعنی تیر

اول و سوم به هدف اصابت کند و تیر دوم به هدف اصابت نکند، بررسی می‌کنیم.

گام دوم: در نتیجه، احتمال آن که فقط تیر دوم به هدف برخورد برابر با $\frac{1}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{30}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: از نمودار درختی برای حل سؤال استفاده می‌کنیم. احتمال انتقال بیماری به فرزند دختر را X فرض می‌کنیم؛ در نتیجه احتمال انتقال بیماری به فرزند پسر برابر با $3X$ می‌شود.



گام دوم: طبق صورت سؤال، احتمال سالم‌بودن فرزند برابر با $\frac{3}{5}$ است؛ پس:

$$P(\text{تولد فرزند سالم}) = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{1}{2}(1-X) + \frac{1}{2}(1-3X) = \frac{3}{5}$$

$$1-X + 1-3X = \frac{6}{5} \Rightarrow 4X = \frac{4}{5} \Rightarrow X = \frac{1}{5}$$

گام سوم: احتمال انتقال بیماری به فرزند پسر برابر است با:

$$P(\text{انتقال بیماری به فرزند پسر}) = 3X = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5} = 60\%$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: تعداد کل جایگشت‌های ۷ نفر برابر است با $7!$ ، پس $n(S) = 7!$ می‌شود.

گام دوم: برای شمارش تعداد حالات مطلوب، اول ۲ نفر از ۵ نفر، A_3, A_4, A_5, A_6 و A_7 را به $\binom{5}{2} = 10$ حالت انتخاب می‌کنیم (مثلاً A_3 و A_4) این دو نفر را بین A_1 و A_2 قرار می‌دهیم.

گام سوم: حالا این ۴ نفر را درون یک بسته و هرکدام از مابقی افراد دیگر را درون یک بسته دیگر قرار می‌دهیم:

$$(A_1 A_3 A_4 A_2) (A_5) (A_6) (A_7)$$

گام چهارم: این چهار بسته ۴! جایگشت دارند. به علاوه خود A_3 و A_4 هم ۲! جایگشت و A_1 و A_2 هم ۲! جایگشت دارند. (حواستون باشه که A_1 تا A_4 ، ۴! جایگشت ندارند، چون A_3 و A_4 باید بین A_1 و A_2 باشند)، پس تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$n(A) = \binom{5}{2} \times 4! \times 2! \times 2!$$

گام پنجم: بنابراین احتمال این‌که دقیقاً دو نفر بین A_1 و A_2 باشند، برابر است با:

$$\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{2} \times \cancel{4!} \times 2! \times 2!}{7!} = \frac{\cancel{4} \times 2 \times 2}{7 \times \cancel{6} \times \cancel{5}} = \frac{4}{21}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پاسخ تشریحی گام اول: پیشامدهای A و B را به این صورت تعریف می‌کنیم:

A: جمع سه تاس ۱۰

B: جمع دو تاس آبی و سبز حداقل برابر ۷

گام دوم: احتمال مجموع عدد سه تاس برابر ۱۰ را می‌خواهیم، به شرط آن که جمع دو تاس آبی و سبز حداقل ۷ باشد، یعنی $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

گام سوم: تعداد اعضای پیشامد B را می‌شماریم. اول به نکته زیر توجه کنید:

نکته برای این که ببینیم جمع عدد دو تاس در چند حالت برابر k می‌شود، می‌توانیم از جدول زیر استفاده کنیم:

جمع عدد دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

با استفاده از این نکته، جمع عدد دو تاس آبی و سبز در $۱+۲+۳+۴+۵+۶=۲۱$ حالت حداقل برابر ۷ می‌شود. به علاوه عدد تاس قرمز نیز ۶ حالت دارد، پس $n(B) = ۲۱ \times ۶ = ۱۲۶$ است.

گام چهارم: حالا باید تعداد اعضای $A \cap B$ را بشماریم. چند حالت داریم:

حالت اول: تاس قرمز ۳ بیاید و جمع دو عدد روی دو تاس آبی و سبز ۷ باشد که طبق نکته، ۶ حالت است.

حالت دوم: تاس قرمز ۲ بیاید و جمع عدد روی دو تاس آبی و سبز ۸ باشد که طبق نکته، ۵ حالت است.

حالت سوم: تاس قرمز ۱ بیاید و جمع عدد روی دو تاس آبی و سبز ۹ باشد که طبق نکته، ۴ حالت است.

پس $n(A \cap B) = ۶ + ۵ + ۴ = ۱۵$ می‌شود.

گام پنجم: بنابراین جواب برابر است با:

$$\frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۱۵}{۱۲۶} = \frac{۵}{۴۲}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پاسخ تشریحی

گام اول: احتمال آن که «در n بار پرتاب یک تاس سه بار ۶ ظاهر شود» را با استفاده از درسنامه فوق حساب می‌کنیم. در این آزمایش، پیشامد پیروزی، آمدن عدد ۶ است که احتمال آن $P = \frac{1}{6}$ است، پس احتمال شکست $1 - P = \frac{5}{6}$ است؛ در نتیجه احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \binom{n}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}$$

گام دوم: احتمال آن که «در پرتاب n ام برای سومین بار ۶ بیاید» به معنی این است که «در $n-1$ پرتاب قبلی ۲ بار ۶ آمده است و در پرتاب n ام ۶ بیاید.» پس با توجه به درسنامه داریم:

$$P(B) = \underbrace{\binom{n-1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{(n-1)-2}}_{\substack{\text{در پرتاب } n\text{ام} \\ \text{اصل ضرب در } n-1 \text{ پرتاب قبلی ۲ بار ۶ بیاید}}} \times \frac{1}{6} = \binom{n-1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}$$

گام سوم: طبق صورت سؤال داریم:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = 2 \Rightarrow \frac{\binom{n}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}}{\binom{n-1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}} = \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n-1}{2}} = \frac{\frac{n!}{3! \times (n-3)!}}{\frac{(n-1)!}{2! \times (n-1-2)!}} = \frac{\frac{n!}{3! \times (n-3)!}}{\frac{2! \times n!}{3! \times (n-1)!}} = 2 \Rightarrow \frac{2n}{6} = 2 \Rightarrow n = 6$$

گام چهارم: احتمال آن که «در n پرتاب تاس ۳ بار عدد اول ظاهر شود» را با توجه به درسنامه به دست می‌آوریم. در این جا پیشامد پیروزی ظاهر شدن عدد اول است که احتمال آن برابر با $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ است؛ پس:

$$\text{احتمال} = \binom{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \xrightarrow{n=6} \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{6!}{3! \times 3!} \times \frac{1}{2^6} = \frac{5 \times 4}{2^6} = \frac{5}{16}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پاسخ تشریحی

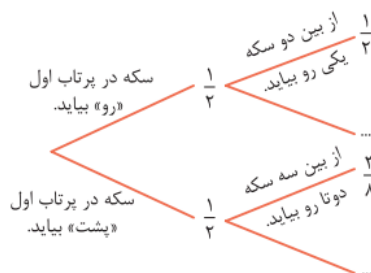
گام اول: ابتدا سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر نتیجه رو باشد، سکه را دو بار دیگر پرتاب می‌کنیم. دقت کنید که می‌خواهیم در کل آزمایش دقیقاً دو بار رو آمدن سکه را ببینیم، پس باید در دو پرتاب جدید، دقیقاً در یک بار سکه رو بیاید که طبق نکته بالا، احتمال آن

$$\text{برابر } \frac{\binom{2}{1}}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ است.}$$

گام دوم: حالا اگر سکه پشت بیاید، سکه را سه بار دیگر پرتاب می‌کنیم که در این صورت، برای دیدن دو بار رو آمدن سکه، باید از بین سه

پرتاب، سکه دقیقاً دو بار رو بیاید که احتمال آن برابر $\frac{3}{8} = \frac{\binom{3}{2}}{2^3}$ می‌شود.

گام سوم: نمودار درختی را رسم می‌کنیم:



بنابراین جواب برابر است با:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{4+3}{16} = \frac{7}{16}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۱

پاسخ تشریحی گام اول: در معادله درجه دوم داده شده، مجموع دو ریشه حقیقی متمایز مد نظر است؛ بنابراین دلتای این معادله باید مثبت باشد:

$$x^2 - ax + b = 0 \Rightarrow \Delta = a^2 - 4b > 0 \quad (*)$$

$$S = \frac{-b}{a} = a < 6$$

گام دوم: مجموع ریشه ها برابر است با:

چون a و b هر دو عددی طبیعی هستند و مقدار a کم تر از ۶ است، به ازای مقادیر طبیعی ۱ تا ۵ برای a ، در نامعادله (*) بررسی می کنیم که

a	۱	۲	۳	۴	۵
b	-	-	۱, ۲	۱, ۲, ۳	۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶

b چه مقدارهایی را می تواند به خود بگیرد:

پس در ۱۱ معادله، شرط های گفته شده، برقرار می شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۲

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا تعداد کل حالت های ممکن را به دست می آوریم تا تعداد اعضای فضای نمونه به دست آید:

$$n(S) = \frac{5}{1} \times \frac{4}{1} \times \frac{3}{1} = 60$$

گام دوم: از احتمال متمم استفاده می کنیم. اگر A پیشامد فرد بودن عدد سه رقمی ساخته شده و B پیشامد مضرب ۳ بودن عدد سه رقمی باشد،

$$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)') = 1 - P(A' \cap B')$$

آن گاه:

که A' یعنی این که عدد سه رقمی، فرد نباشد و B' یعنی این که عدد سه رقمی، مضرب ۳ نباشد.

گام سوم: $n(A' \cap B')$ را پیدا می کنیم: عدد سه رقمی ساخته شده، نه فرد باشد و نه مضرب ۳.

بنابراین از بین $\{5, 4, 3, 2, 1\}$ ، گروه های ۳ تایی زیر را خواهیم داشت:

$$\{5, 4, 2\}: \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{2}{1} = 4 \quad \{5, 4, 1\}: \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = 2 \quad \{1, 3, 4\}: \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = 2$$

$$\{4, 2, 1\}: \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{2}{1} = 4 \quad \{5, 1, 2\}: \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = 2 \quad \{2, 3, 5\}: \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = 2$$

پس $n(A' \cap B') = 16$ است.

$$P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B') = 1 - \frac{16}{60} = \frac{44}{60} = \frac{11}{15}$$

گام چهارم: در نتیجه داریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

تعداد کل اعداد سه رقمی قابل ساخت را محاسبه می کنیم. در این عددها یا از دو رقم تکراری استفاده شده و یا عدد ساخته شده رقم تکراری ندارد.

$$\begin{aligned} \bigcirc \bigcirc \square &\rightarrow 2, 2, \square \rightarrow \binom{3}{1} \times \frac{3!}{2!} = 9 \\ &\xrightarrow{+} n(S) = 24 + 9 = 33 \\ \bigcirc \square \Delta &\rightarrow \binom{4}{3} \times 3! = 24 \end{aligned}$$

حال اگر عددی سه رقمی قرار باشد بر ۳ بخش پذیر باشد، باید مجموع ارقام آن بر ۳ بخش پذیر باشد. در این صورت ارقام سازنده آن به شکل

$$\begin{aligned} 2, 3, 4 &\rightarrow 3! = 6 \\ 2, 3, 7 &\rightarrow 3! = 6 \end{aligned} \xrightarrow{+} n(A) = 12 \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{33} = \frac{4}{11}$$

زیر خواهند بود:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۳

روشنی اول: ۱۰۴

قبولی فرهاد قبولی شیرین

$$P(S \cap F) = P(S)P(F)$$

پیشامد قبولی شیرین و فرهاد در آزمون رانندگی مستقل از هم می‌باشند. بنابراین:
احتمال اینکه شیرین قبول شود و فرهاد قبول نشود:

$$P(S \cap F') = P(S - F) = P(S) - P(S \cap F) = P(S) - P(S)P(F) = 0/8 - 0/8 \times 0/9 = 0/8$$

روشنی دوم:

$$P(S \cap F') = P(S)P(F') = 0/8 \times 0/1 = 0/8$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پیشامد آن که مشتری کتاب "مثنوی معنوی" را خریده باشد: A

پیشامد آن که مرد باشد: M

پیشامد آن که زن باشد: W

$$P(A) = P(M)P(A|M) + P(W)P(A|W) = \frac{20}{100} \times \frac{40}{100} + \frac{25}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{8}{100} + \frac{15}{100} = \frac{23}{100}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

احتمال آن که حداکثر ۷ نفر پسر باشند:

$$P(A) = 1 - P(8 \text{ نفر پسر باشند}) = 1 - \frac{1}{2^8} = \frac{255}{256}$$

$$P(B) = \frac{1}{256}$$

احتمال آن که فقط فرزند اول و دوم دختر باشند:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{255}{256}}{\frac{1}{256}} = 255$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

بررسی گزینه‌ها: ۱۰۷

$$P((A \cap B)|B) = \frac{P((A \cap B) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B) \checkmark$$

$$P((B - A)|B) = \frac{P((B - A) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B - A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B) \checkmark$$

$$P(A)P(B|A) = P(A \cap B) = 1 - P(A \cap B)' = 1 - P(A' \cup B') \times$$

$$P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{1 - P(A' \cap B)'}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} \checkmark$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

حداقل ۲ مهره قرمز یعنی یا ۲ مهره قرمز یا ۳ مهره قرمز و یا ۴ مهره قرمز خارج شده باشد.

$$n(A) = \binom{6}{2} \binom{6}{2} + \binom{6}{3} \binom{6}{1} + \binom{6}{4} \binom{6}{0} = 15 \times 15 + 20 \times 6 + 15 \times 1 = 360$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$P(A) = ۰/۵, P(B) = ۰/۴$$

$$P(A \cup B) = ۰/۷ \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۷$$

$$\Rightarrow ۰/۵ + ۰/۴ - P(A \cap B) = ۰/۷ \Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۲$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow A \text{ و } B \text{ مستقل هستند.}$$

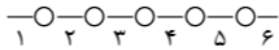
A' و B' نیز مستقل هستند.

$$P(A'|B') = P(A') = ۱ - ۰/۵ = ۰/۵$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

محل قرار گرفتن ماژیک‌ها را با $\bigcirc$ نمایش می‌دهیم. مدادهای رنگی در — قرار می‌گیرند.



در حالتی که هیچ‌یک از مدادهای رنگی کنار هم نباشند، باید چهار شماره از شش شماره موجود را انتخاب کرد.

بدیهی است مدادها $4!$ و ماژیک‌ها $5!$ جایگشت دارند.

$$P(A) = \frac{\binom{6}{4} 4! 5!}{9!}$$

در حالتی که مدادهای رنگی یک در میان قرار می‌گیرند. مدادها باید در یکی از سه حالت $۱, ۲, ۳, ۴$ یا $۲, ۳, ۴, ۵$ یا $۳, ۴, ۵, ۶$ واقع باشند.

$$P(B) = \frac{3 \times 4! \times 5!}{9!}$$

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\binom{6}{4}}{3} = \frac{۱۵}{۳} = ۵$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پیشامد هر دو سفید بودن را A و پیشامد هر دو سیاه بودن را B می‌نامیم. واضح است A و B ناسازگار می‌باشند.

$$P(A) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{۲۱}{۶۶} = \frac{۷}{۲۲}, \quad P(B) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{۱۰}{۶۶} = \frac{۵}{۳۳}$$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B - A)}{1 - P(A)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{۵}{۳۳} - ۰}{1 - \frac{۷}{۲۲}} = \frac{\frac{۵}{۳۳}}{\frac{۱۵}{۲۲}} = \frac{۲}{۹}$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۱

۱۰۹

۱۱۲

نکته: احتمال رخداد پیشامد A را با $P(A)$ نمایش می‌دهند که برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}}$$

تعداد حالات پیشامد فضای نمونه موردنظر را می‌نویسیم:

$$n(S) = 6^3 = 216$$

$$A_1 = \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\} \Rightarrow n(A_1) = 3$$

$$A_2 = \{(2, 2, 2), (2, 2, 4), \dots, (6, 6, 6)\} \Rightarrow n(A_2) = 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$$

$$n(A) = n(A_1) + n(A_2) = 3 + 27 = 30$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{216} = \frac{5}{36}$$

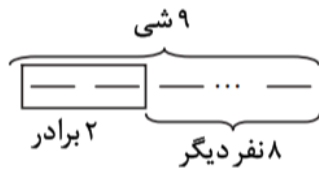
بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۳

$$P(A) = 1 - P(A')$$

ابتدا احتمال متمم پیشامد موردنظر را محاسبه می‌کنیم. احتمال آنکه دو برادر کنار هم باشند، برابر است با:



$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{2 \times 9!}{10!} = \frac{2}{10}$$

(برای محاسبه اعضای این پیشامد دو برادر را در کنار یکدیگر به عنوان یک شیء در کنار هشت نفر دیگر در نظر گرفته‌ایم.)

پس احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = 0.8$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۴

نکته: دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند، هرگاه:

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه A و B' نیز مستقل از هم هستند، یعنی:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$$

با توجه به نکات بالا داریم:

$$P(B|A) = 0.7 \xrightarrow{A \text{ و } B \text{ مستقل‌اند}} P(B) = 0.7 \Rightarrow P(B') = 1 - 0.7 = 0.3$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = P(A) + P(B') - P(A) \cdot P(B') = 0.4 + 0.3 - 0.4 \times 0.3 = 0.7 - 0.12 = 0.58$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۵

در پرتاب دو تاس، فضای نمونه‌ای $n(S) = ۳۶$ عضو دارد.

از طرفی می‌خواهیم میانگین دو تاس مضرب ۲ باشد، پس:

(۱) میانگین دو تاس برابر ۲ باشد = مجموع دو تاس برابر ۴ باشد:

$$A_1 = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\} \Rightarrow n(A_1) = 3$$

(۲) میانگین دو تاس برابر ۴ باشد = مجموع دو تاس برابر ۸ باشد:

$$A_2 = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\} \Rightarrow n(A_2) = 5$$

(۳) میانگین دو تاس برابر ۶ باشد = مجموع دو تاس برابر ۱۲ باشد:

$$A_3 = \{(6, 6)\} \Rightarrow n(A_3) = 1$$

بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$n(A) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) = 3 + 5 + 1 = 9$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۶

چون در ابتدا مهره خارج شده را مشاهده نکرده‌ایم، مانند آن است که هیچ مهره‌ای از جعبه خارج نشده است. پس می‌توانیم این گونه

برداشت کنیم که از جعبه دو مهره خارج می‌کنیم و احتمال هم‌رنگ بودن را می‌خواهیم.

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{6 + 3 + 1}{36} = \frac{5}{18}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۷

کل تعداد حالات یا فضای نمونه‌ای $n(S) = 9!$ است و تعداد اعضای پیشامد را به این صورت به دست می‌آوریم که انگار ۳ تا جایگاه داخل زمین

را برای این سه نفر در نظر گرفته و به یک حالت در این ۳ جایگاه جابه‌جا می‌شوند.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{9}{3} \times 1 \times 6!}{9!} = \frac{\frac{9!}{3!6!} \times 6!}{9!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۸

تعداد اعضای فضای نمونه برابر $n(S) = \binom{10}{8}$ است.

در پیشامد A برای اینکه اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو برابر ۸ باشد، دو حالت وجود دارد:

۹ = بزرگ‌ترین عضو ۱ = کوچک‌ترین عضو (حالت اول)

در این حالت، باید از بین اعداد $\{2, 3, \dots, 8\}$ ، ۶ عضو انتخاب کنیم که به $\binom{7}{6}$ طریق ممکن است.

۱۰ = بزرگ‌ترین عضو ۲ = کوچک‌ترین عضو (حالت دوم)

در این حالت باید از بین اعداد $\{3, 4, \dots, 9\}$ ، ۶ عضو انتخاب کنیم که به $\binom{7}{6}$ طریق ممکن است.

$$\Rightarrow n(A) = \binom{7}{6} + \binom{7}{6} = 2 \times 7 = 14$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{14}{\binom{10}{8}} = \frac{14}{45}$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۹

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $\binom{20}{3}$ است. (تعداد افراد ۲۰ نفر است، پنج مدرسه که هر کدام ۴ دانش‌آموز را به اردو آورده‌اند).

از طرفی تعداد اعضای پیشامد مورد نظر برابر است با:

$$\binom{5}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 ابتدا سه مدرسه را بعد از هر مدرسه
 انتخاب می‌کنیم یک نفر

بنابراین احتمال این که سه نفر انتخاب شده برای یک تیم، دو به دو هم‌مدرسه‌ای نباشند برابر است با:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{\cancel{5} \times 4 \times 4 \times 4}{\cancel{20} \times 19 \times 18} = \frac{4 \times 4 \times 4}{19 \times 6} = \frac{22}{57}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۰

تعداد کل حالات ساختن یک چهارضلعی برابر است با:

$$n(S) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \times 6!} = \frac{10 \times \cancel{9} \times \cancel{8} \times 7}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 210$$

حالا برای آن که AB قطر چهارضلعی باشد، باید از هر طرف AB یک نقطه انتخاب کنیم:

$$n(A) = \binom{5}{1} \binom{3}{1} = 15$$

$$P(A) = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۱

فرض کنیم تعداد مهره قرمز در ظرف B برابر n باشد، در این صورت، احتمال آن که هر ۴ مهره قرمز باشد، برابر است با:

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} \times \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+4}{2}} = \frac{1}{27} \Rightarrow \frac{4 \times 3}{10 \times 9} \times \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+4)(n+3)}{2}} = \frac{12n(n-1)}{90(n+3)(n+4)} = \frac{1}{27}$$

$\nearrow$ $\nwarrow$
 مهره کیسه A قرمز باشد مهره کیسه B قرمز باشد

$$\Rightarrow \frac{12n(n-1)}{90(n+3)(n+4)} = \frac{1}{27} \Rightarrow 18n(n-1) = 5(n^2 + 7n + 12)$$

$$\Rightarrow 13n^2 - 53n - 60 = 0 \Rightarrow (n-5)(13n+12) = 0 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow \text{تعداد مهره B} = 9$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

روشی اول:

۱۲۲

 $P(A)$ و $P(B)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A') \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ P(B) &= 1 - P(B') \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{A و B دو پیشامد مستقل هستند}} P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

اکنون $P(A \cup B)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{13}{15}$$

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{13}{15} = \frac{2}{15}$$

پس:

روشی دوم:

$$P((A \cup B)') = P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۳

اگر احتمال قبولی در آزمون مدرسه A را با $P(A)$ و احتمال قبولی در آزمون ورودی مدرسه B را با $P(B)$ نمایش دهیم، بنابراین:احتمال قبولی سارا فقط در یک آزمون $P(A - B) + P(B - A)$

$$P(A \cap B') + P(B \cap A') = P(A) \times P(B') + P(B) \times P(A') = \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

تذکر: دقت کنید مفهوم قبولی سارا فقط در یک آزمون این است که در آزمون A قبول شود و در B نشود یا در B قبول شود و در A نشود.

مفهوم قبولی سارا در حداقل یک آزمون یعنی یا در A قبول شود و در B نشود یا در B قبول شود و در A نشود یا در هر دو قبول شود

که متمم آن این است که در هر دو قبول نشود، یعنی:

$$1 - P(A' \cap B') = P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(B \cap A') + P(A \cap B)$$

از طرفی، چون A و B مستقل اند (قبولی در مدرسه A ارتباطی به قبولی در مدرسه B ندارد)، تمامی اشتراک‌ها به ضرب تبدیل می‌شود.

بنابراین، احتمال قبولی سارا در حداقل یک آزمون برابر است با:

$$1 - P(A' \cap B') = 1 - P(A') \times P(B') = 1 - \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$$

در نتیجه نسبت احتمال قبولی سارا فقط در یک آزمون به احتمال قبولی او در حداقل یک آزمون برابر $\frac{0}{9} = \frac{0}{3} \div \frac{1}{3}$ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

۱۲۴

از فضای نمونه‌ای کاهش یافته استفاده می‌کنیم، یعنی فضای نمونه‌ای را اعداد مضرب ۵ در نظر می‌گیریم.

حالت اول: رقم یکان صفر باشد:

$$\begin{array}{c} 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \\ \downarrow \\ \text{صفر باشد} \end{array} = 24$$

$$\begin{array}{c} 3 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{صفر نباشد} \quad \text{۵ باشد} \end{array} = 18$$

حالت دوم: رقم یکان ۵ باشد:

حالت‌های مطلوب سوال این است که عدد انتخاب شده زوج باشد (یعنی رقم یکان آن‌ها ۰، ۲، ۴، ۶، ... باشد) پس احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A) = \frac{24}{24 + 18} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



۱۲۵

پیشامدهای A و B را به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم:

A: پیشامد آن که ورزشکار قهرمان شود.

B: پیشامد آن که ورزشکار دوپینگ کند.

بنابراین:

$$P(A|B) = {}^2P(A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = {}^2P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = {}^2P(A)P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{{}^2P(A)P(B)}{P(A)} = {}^2P(B) = 2 \times \frac{10}{100} = \frac{20}{100} = 20\%$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\left. \begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3}P(B) \\ P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}P(A) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3}P(B) = \frac{1}{4}P(A) \Rightarrow P(B) = \frac{3}{4}P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + \frac{3}{4}P(A) - \frac{1}{4}P(A) = \frac{3}{2}P(A)$$

بنابراین:

$$\frac{P(A \cup B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{2}P(A)}{P(A)} = \frac{3}{2}$$

پس:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

در پرتاب دو تاس فضای نمونه‌ای $n(S) = 36$ عضو دارد و تعداد حالاتی که مجموع دوتاس حداقل ۸ است

۱۲۶

یعنی ۱۱، ۱۰، ۹، ۸ و ۱۲ برابر است با:

$$A = \{(2,6), (3, \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \end{Bmatrix}), (4, \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}), (5, \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}), (6, \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix})\} \Rightarrow n(A) = 1+2+3+4+5 = 15$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $\binom{10}{5}$ می‌باشد.

۱۲۸

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{\cancel{10} \times \cancel{9} \times \cancel{8} \times \cancel{7} \times \cancel{6}}{\cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 4 \times 9 \times 7$$

تعداد اعضای پیشامد تصادفی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\underbrace{\binom{4}{3} \binom{6}{2}}_{\text{تجربی ۳}} + \underbrace{\binom{4}{4} \binom{6}{1}}_{\text{تجربی ۴}} = 4 \times 15 + 1 \times 6 = 66$$

۱ غیرتجربی
۲ غیرتجربی

$$P = \frac{66}{4 \times 9 \times 7} = \frac{11}{2 \times 3 \times 7} = \frac{11}{42}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

وقتی می‌گویند دقیقاً یکی از دو پیشامد رخ دهد یعنی یا (اولی رخ دهد و دومی رخ ندهد)

۱۲۹

یا (اولی رخ ندهد و دومی رخ دهد):

$$P = \frac{5}{8} \times \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{5}{40} + \frac{12}{40} = \frac{17}{40}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۰

می‌دانیم تفاضل اعداد رو شده مضرب ۴ است. پس فضای نمونه جدید برابر است با:

$$S_{\text{جدید}} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,5), (2,6), (5,1), (6,2)\}$$

بنابراین پیشامد مورد نظر به صورت $A = \{(6,6), (2,6), (6,2)\}$ خواهد بود. پس احتمال برابر است با:

$$P(A|B) = P(A|S_{\text{جدید}}) = \frac{3}{10} = 0.3$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۱

احتمال موفقیت در آزمون اول را $P(A)$ و احتمال موفقیت در آزمون دوم را $P(B)$ در نظر می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.75 = \frac{P(A \cap B)}{0.6} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.45$$

برای محاسبه احتمال موفقیت امین در حداقل یکی از آزمون‌ها، باید احتمال اجتماع آنها را محاسبه کنیم، بنابراین:

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.5 - 0.45 = 0.65$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - متوسط)

۱۳۲

اگر احتمال به ورزشگاه رفتن آرش و بهروز را به ترتیب با $P(A)$ و $P(B)$ نشان دهیم $P(B'|A')$ را می‌خواهیم. پس:

$$P(B'|A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{P(A \cup B)'}{1 - P(A)} = \frac{1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))}{1 - P(A)}$$

بنابراین باید $P(A \cap B)$ را به دست آوریم تا $P(B'|A')$ معلوم شود:

$$P(A'|B) = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{P(B - A)}{P(B)} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{P(A \cap B)}{\frac{7}{20}} = \frac{4}{7} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{20}$$

حال می‌توان $P(B'|A')$ را محاسبه کرد:

$$P(B'|A') = \frac{1 - (\frac{2}{5} + \frac{7}{20} - \frac{3}{20})}{1 - \frac{7}{20}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{13}{20}} = \frac{2}{13}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۳

عدد ظاهر شده در تاس علی با مجموع دو عدد ظاهر شده در تاس‌های رضا برابر است، پس:

علی	۲	۳	۴	۵	۶
رضا	حالت ۱	حالت ۲	حالت ۳	حالت ۴	حالت ۵

$$\Rightarrow P = \frac{1+2+3+4+5}{6 \times 36} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۴

پیشامد مورد نظر به صورت زیر است:

$$A = \{(\underbrace{2,4,6}_{\text{حالت ۶}}), (\underbrace{4,4,4}_{\text{حالت ۱}})\} \Rightarrow P = \frac{7}{216}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۵

باید ۲ مداد اول قرمز و مداد سوم آبی یا ۲ مداد اول آبی و مداد سوم قرمز باشد، پس:

$$P = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}\binom{4}{1} + \binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{1}\binom{9}{1}\binom{8}{1}} = \frac{192}{720} = \frac{4}{15}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۶

متمم حالتی است که دو فرزند دوقلو و یکی از سه فرزند دیگر به مهمانی بروند، پس:

$$P = 1 - \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} = 0.7$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۷

حالت‌هایی که همه فرزندان پسر یا همه فرزندان دختر باشند را کنار می‌گذاریم، پس:

در این فضای نمونه پیشامد مطلوب به‌صورت زیر است:

$$A = \{(پ, د, پ, د, پ), (د, پ, د, پ, د)\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۸

پیشامد قبولی در آزمون اول را A و در آزمون دوم را B نمایش می‌دهیم. پس:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.7 = \frac{P(A \cap B)}{0.2} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.14$$

$$\Rightarrow P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - (0.2 + 0.22 - 0.14)}{1 - 0.2} = \frac{0.72}{0.8} = 0.9$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۹

باید درب‌ها در تلاش‌های اول و دوم و سوم بسته باشند و در تلاش چهارم باز باشد، پس:

$$P = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۰

دو پیشامد A و B مستقل‌اند، پس $P(A|B) = P(A)$ است. از طرفی با توجه به صورت سؤال رابطه $P(A|B) = P(B)$ نیز برقرار است،در نتیجه $P(A) = P(B)$ است. در ضمن احتمال رخ دادن هر دو پیشامد برابر $\frac{4}{9}$ است، پس:

$$P(A \cap B) = \frac{4}{9} \Rightarrow P(A)P(B) = \frac{4}{9} \xrightarrow{P(A)=P(B)} P^2(A) = \frac{4}{9} \Rightarrow P(A) = P(B) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow P(A - B) = P(A) - \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A)P(B)} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۱ در ۶ حالت زیر، جمع دو تاس، کوچک‌تر یا برابر ۴ است:

$$\{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1)\}$$

پس اگر پیشامد ظاهر شدن عدد بزرگ‌تر از ۴ در پرتاب دو تاس را با A نمایش دهیم، $n(A) = 36 - 6 = 30$ است. پیشامد ظاهر شدن «رو» در پرتاب سکه را نیز با B نمایش می‌دهیم، چون این دو پیشامد نسبت به هم مستقل‌اند، پس:

$$P(A \cup B) = \frac{30}{36} + \frac{1}{2} - \frac{30}{36} \times \frac{1}{2} = \frac{10+6-5}{12} = \frac{11}{12}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۲ متمم حداقل یک عدد مضرب ۳ باشد برابر است با: هیچ عددی مضرب ۳ نباشد. بنابراین ۳ و ۶ را از تاس‌ها حذف کرده و $4 \times 4 = 16$ حالت می‌شود، بنابراین از ۳۶ حالت در ۱۶ حالت هیچ عددی مضرب ۳ نیست. در ۲۰ حالت حداقل یکی از اعداد مضرب ۳ است.

$$A \cap B = \{(2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (5,6), (6,5)\} \rightarrow n(A \cap B) = \frac{6}{36}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \frac{20}{36} + \frac{10}{36} - \frac{6}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۳ مهره‌ها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



باید دو مهره انتخاب شده هم‌رنگ باشند، یا دو مهره انتخاب شده از بین اعداد $\{1,1,I\}$ یا $\{2,2,II\}$ یا $\{3,3,III\}$ یا $\{4,4\}$ باشند:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + 3 \times \binom{3}{2} + 1}{\binom{12}{2}} = \frac{10+6+3+9+1}{66} = \frac{29}{66}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

با توجه به تعریف پیشامد مستقل و شرطی داریم:

۱۴۴

$$P(A|B) = P(B) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(B) \xrightarrow[B, A]{\text{مستقل}} \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(B)$$

در نتیجه $P(A) = P(B)$

احتمال اینکه هر دو پیشامد رخ دهد برابر $P(A \cap B)$ می باشد:

$$P(A \cap B) = \frac{4}{9} \xrightarrow[B, A]{\text{مستقل}} P(A) \times P(B) = \frac{4}{9} \xrightarrow{P(A)=P(B)} P(A)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3} = P(B)$$

$P(A - B)$ را حساب می کنیم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \xrightarrow[B, A]{\text{مستقل}} P(A) - P(A) \times P(B) = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

نکته: اگر S فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی باشد و $A \subseteq S$ یک پیشامد فضای S باشد، احتمال رخداد پیشامد A یعنی $P(A)$ برابر

۱۴۵

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \text{ می باشد.}$$

$$\text{نکته: } P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 1 - P(A') \\ P(A') = 1 - P(A) \end{cases}$$

متمم پیشامد خواسته شده این است که هر ۳ برادر انتخاب شوند، پس کفایت یک نفر از ۵ نفر دیگر انتخاب شود، داریم:

$$P(A') = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{8}{4}} = \frac{5}{\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}} = \frac{1}{14}$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14} \text{ بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

نکته: احتمال A به شرط B که آن را با نماد $P(A|B)$ نشان می دهند، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است. برای محاسبه $P(A|B)$ داریم:

۱۴۶

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نکته: برای دو پیشامد A و B داریم:

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

اگر احتمال زدن گل اول را با $P(A)$ و احتمال بردن بازی را با $P(B)$ نشان دهیم، داریم:

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.5, \quad P(B|A) = 0.8 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.8 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.8 P(A) = 0.8 \times 0.6 = 0.48$$

احتمال زدن گل اول به شرط آنکه بازی را برده باشد، معادل $P(A'|B)$ است. پس:

$$P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B - A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.5 - 0.48}{0.5} = \frac{0.02}{0.5} = 0.04$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۷

نکته ۱: تعداد روش‌های انتخاب I^* شیء متمایز از میان n شیء که ترتیب در آن‌ها اهمیت نداشته باشد را با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش داده و ترکیب I^* از n می‌نامیم که برابر است با:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

نکته ۲: احتمال رخداد پیشامد A در فضای نمونه‌ای S را با $P(A)$ نمایش داده و برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

با توجه به نکته ۱، تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای پیشامد، برابر است با:

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$$

برای آنکه عدد ۸ بزرگ‌ترین عضو زیرمجموعه باشد، بایستی علاوه بر عدد ۸، دو عضو از میان ۷ عضو ۱ تا ۷ برداریم، پس تعداد اعضای پیشامد، با توجه به نکته ۱، برابر است با:

$$n(A) = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

و در نهایت با توجه به نکته ۲، خواهیم داشت:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40} = 0.175 = 17.5\%$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۸

نکته: احتمال رخداد پیشامد A در فضای نمونه‌ای S را با $P(A)$ نمایش داده و برابر است با:

فضای نمونه پرتاب همزمان این دو تاس عبارت است از:

همچنین پیشامد آنکه مجموع دو تاس عددی فرد باشد، عبارت است از:

بنابراین احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{9}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۹

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{نکته (احتمال شرطی)}$$

پیشامدهای A و B را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

A : پیشامد دچار نقص فنی نشدن اتومبیل

B : پیشامد رسیدن اتومبیل به خط پایان

$$\begin{cases} P(A \cap B) = 0.7 \\ P(A) = 0.8 \end{cases} \Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.7}{0.8} = \frac{7}{8}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۰

پاسخ تشریحی

گام اول: در پرتاب n تاس، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای 6^n است، پس در این جا داریم: $n(s) = 6^2 = 36$

گام دوم: این ۳۶ حالت به صورت زیر تقسیم‌بندی می‌شوند:

۱۵ حالتی که عدد تاس اول بزرگ‌تر از عدد تاس دوم است.	۶ حالتی که عدد دو تاس یکسان است.	۱۵ حالتی که عدد تاس دوم بزرگ‌تر از عدد تاس اول است.
(۲,۱) (۳,۱), (۳,۲) (۴,۱), (۴,۲), (۴,۳) (۵,۱), (۵,۲), (۵,۳), (۵,۴) (۶,۱), (۶,۲), (۶,۳), (۶,۴), (۶,۵)	(۱,۱), (۲,۲) (۳,۳), (۴,۴) (۵,۵), (۶,۶)	(۱,۲), (۱,۳), (۱,۴), (۱,۵), (۱,۶) (۲,۳), (۲,۴), (۲,۵), (۲,۶) (۳,۴), (۳,۵), (۳,۶) (۴,۵), (۴,۶) (۵,۶)

$$n(A) = 15$$

پس تعداد اعضای پیشامد مطلوب برابر است با:

$$P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

گام سوم: در نهایت احتمال مورد نظر برابر است با:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{(0/6)^3}{1 - (0/6)^3}}{\frac{(\frac{3}{5})^3}{1 - (\frac{3}{5})^3}} = \frac{\frac{27}{125}}{\frac{117}{125}} = \frac{27}{117}$$

هر سه تادختر هر سه پسر است

۱۵۱

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2) + \dots + P(B_n)P(A | B_n)$$

$$P(A) = P(B_1) \underbrace{P(A | B_1)}_{\frac{1}{4}} + P(B_2) \underbrace{P(A | B_2)}_{\frac{1}{4}} + P(B_3) \underbrace{P(A | B_3)}_{\frac{1}{4}}$$

$$\left. \begin{aligned} i=1 &\Rightarrow P(B_1) = \frac{1}{6} \\ i=2 &\Rightarrow P(B_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ i=3 &\Rightarrow P(B_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{6}{6} \right) = \frac{1}{4}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{کوچکتر از } 2 \text{ (1,2)}} P &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{پرتاب 3 سکه}} \frac{\binom{3}{2}}{2^3} = \frac{3}{8} \xrightarrow{\text{بیشتر یا مساوی 3 (3,4,5,6)}} P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{پرتاب 4 سکه}} \frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{3}{8} \\ \xrightarrow{\text{احتمال کل}} &\frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

۱۵۳

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۴

$$P(\text{زن}) + P(\text{مرد}) = 1 \Rightarrow \frac{4}{7}P(\text{مرد}) + P(\text{مرد}) = 1$$

$$P(\text{مرد}) = \frac{3}{7}, P(\text{زن}) = \frac{4}{7}$$

$$P(\text{باسوادبودن}) = P(B) = \frac{4}{7} \times \frac{40}{100} + \frac{3}{7} \times \frac{60}{100} = \frac{34}{70} = \frac{17}{35}$$

$$P(Z \cup B) = P(Z) + P(B) - P(Z \cap B) = \frac{4}{7} + \frac{17}{35} - \left(\frac{4}{7} \times \frac{40}{100}\right) = \frac{37}{35} - \frac{8}{35} = \frac{29}{35}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پاسخ تشریحی

۱۵۵

گام اول: رابطه دو پیشامد مستقل را می نویسیم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow \frac{1}{7}P(A) = P(A)P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{7}$$

گام دوم: رابطه بین اجتماع و اشتراک دو پیشامد را نوشته و شرط مستقل بودن پیشامدها را در نظر می گیریم.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 2P(A) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\Rightarrow 2P(A) = P(A) + \frac{1}{7} - \frac{1}{7}P(A) \Rightarrow \frac{3}{7}P(A) = \frac{1}{7} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

گام سوم: احتمال وقوع پیشامد A' را محاسبه می کنیم:

$$P(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۶

تعداد کل حالات $6 \times 6 \times 6 = 216$ است. حالات مطلوب را پیدا می کنیم: (در بالای هر ۳ عدد، جایگشت اعداد نوشته شده)

$$\begin{array}{c} \text{حالت ۳} \\ ۵: (۱, ۱, ۳), (۱, ۲, ۲) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{حالت ۶} \\ ۱۰: (۱, ۳, ۶), (۱, ۴, ۵), (۲, ۲, ۶), (۲, ۳, ۵), (۲, ۴, ۴), (۳, ۳, ۴) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{حالت ۳} \\ ۱۵: (۳, ۶, ۶), (۴, ۵, ۶), (۵, ۵, ۵) \end{array}$$

پس ۴۳ حالت داریم و احتمال خواسته شده برابر است با $\frac{43}{216}$.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۷

اگر A پیشامد زوج نبودن عدد انتخابی باشد، آنگاه: $P(A) = \frac{5}{9}$ اگر B پیشامد مضرب سه بودن عدد انتخابی باشد، آنگاه $P(B) = \frac{3}{9}$ همچنین داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{9} + \frac{3}{9} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad P(A \cap B) = \frac{2}{9} \text{ در نتیجه:}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$P(A') = \frac{1}{4}P(B) \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{4}P(B)$$

۱۵۸

$$P(\text{دست کم یکی}) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A)P(B)}_{\text{مستقلند}}$$

$$0/88 = 1 - \frac{x}{4} + x - \left(1 - \frac{x}{4}\right)x$$

اگر $P(B) = x$ باشد داریم:

$$0/88 = 1 + \frac{x}{4} - x + \frac{x^2}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - 0/12 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 0/24 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 0/6)(x - 0/4) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = P(B) = 0/6 \\ x = P(B) = 0/4 \end{cases}$$

(دیاژ ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\bar{x} = \frac{16 + 11 + 15 + 14}{4} = \frac{56}{4} = 14$$

۱۵۹

با حذف این داده‌ها $\bar{x}$ تغییر نکرده پس $\bar{x}$ اولیه برابر میانگین همین داده‌ها است:

$$CV_r = \frac{\sigma_r}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{25}{100} = \frac{\sigma_r}{14} \Rightarrow \sigma_r = \frac{7}{2}$$

ضریب تغییر داده‌های فعلی برابر است با:

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{16} = \frac{49}{4} \Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{49 \times 16}{4} = 196$$

پس واریانس جدید $\sigma_r^2 = \frac{49}{4}$ است و داریم:در حالت اولیه، جمع $(x_i - \bar{x})^2$ ها علاوه بر ۱۹۶، شامل چهار پیرانتز دیگر هم هست:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 196 + \underbrace{(11 - 14)^2}_9 + \underbrace{(15 - 14)^2}_1 + \underbrace{(16 - 14)^2}_4 + \underbrace{(14 - 14)^2}_0$$

$$\sigma_r^2 = \frac{110}{4} = 10/5$$

(دیاژ ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$P(\text{قبول}) = \underbrace{\frac{5}{11} \times \frac{1}{10}}_{\text{تجربی}} + \underbrace{\frac{4}{11} \times \frac{7}{10}}_{\text{ریاضی}} + \underbrace{\frac{2}{11} \times \frac{4}{10}}_{\text{انسانی}} = \frac{5 + 28 + 8}{110} = \frac{41}{110}$$

۱۶۰

(دیاژ ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

 $P(A)$ = احتمال قهرمانی تیم والیبال $P(B)$ = احتمال قهرمانی تیم فوتبال = x $P(B - A)$ = احتمال فقط قهرمانی تیم فوتبال $P(A | B)$ = احتمال قهرمانی تیم والیبال به شرط قهرمانی تیم فوتبال $P(A \cap B)$ = احتمال قهرمانی هر دو تیم = $0/1$

$$P(B - A) = P(A | B) + 0/2 \Rightarrow P(B) - P(B \cap A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + 0/2 \Rightarrow x - 0/1 = \frac{0/1}{x} + 0/2 \xrightarrow{\times x} x^2 - 0/1x = 0/1 + 0/2x$$

$$\Rightarrow x^2 - 0/3x - 0/1 = 0 \Rightarrow (x - 0/5)(x + 0/2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(B) = x = 0/5 \\ P(B) = x = -0/2 \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۱

۴ یا ۵ تا از این پنج رقم را کنار هم قرار می‌دهیم، پس:

$$n(S) = P(\Delta, \varphi) + P(\Delta, \delta) = 5! + 5! = 240$$

جمع این ۵ رقم برابر با ۱۶ است؛ پس هیچ‌یک از اعداد پنج‌رقمی مضرب ۳ نیست.

$$n(A) = 2 \times 4! = 48$$

در اعداد چهاررقمی، اگر با ارقام ۲, ۳, ۴, ۶ بسازیم جمع ارقام برابر با ۱۵ و اگر از ارقام ۱, ۲, ۳, ۶ استفاده شود، مجموع ارقام برابر با ۱۲ است. پس:

$$P(A) = \frac{48}{240} = \frac{1}{5}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

مجموع اختلاف از میانگین‌ها صفر است:

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0 + a + b + 3 + 2 + 1 = 0 \Rightarrow a + b = -6$$

$$\sigma^2 = \frac{a^2 + b^2 + 0 + 9 + 1 + 4}{6} = \frac{a^2 + b^2 + 14}{6}$$

این حاصل وقتی می‌نیم است که $a = b = -3$ و داریم:

$$\sigma^2_{\min} = \frac{18 + 14}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$P(\text{مجموع مضرب } 4 \mid \text{حداقل یک مضرب } 3) = \frac{7}{9}$$

$$S = \left\{ \begin{array}{cc} 6, 2 & \\ 1, 3 & 2, 6 \\ 2, 2 & 5, 3 & 6, 6 \\ 3, 1 & 3, 5 \\ & 4, 4 \end{array} \right\}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

چون با اضافه شدن داده‌های ۱۸ و ۹ و ۶ به داده‌های اولیه، میانگین تغییری نمی‌کند، پس میانگین داده‌های اولیه برابر $11 = \frac{6+9+18}{3}$ است.

پس:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 11n$$

در ضمن، مجموع اختلاف داده‌ها از عدد ۸ برابر ۳۶ است، پس:

$$(x_1 - 11) + (x_2 - 11) + \dots + (x_n - 11) = 36$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_1 + \dots + x_n}_{11n} - 11n = 36 \Rightarrow 3n = 36 \Rightarrow n = 12$$

از طرفی واریانس داده‌های اولیه برابر $4 = 2^2$ است، پس:

$$(x_1 - 11)^2 + (x_2 - 11)^2 + \dots + (x_{12} - 11)^2 = 4 \times 12 = 48$$

پس با اضافه شدن داده‌های ۱۸ و ۹ و ۶ واریانس داده‌های جدید را پیدا می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{48 + (6-11)^2 + (9-11)^2 + (18-11)^2}{15} = \frac{48 + 25 + 4 + 49}{15} = \frac{126}{15} = 8.4$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۶

چون می‌دانیم حاصل ضرب دو عدد مضرب ۳ است، پس حالت‌هایی که هردو رو شده ۵ و ۴ و ۲ و ۱ هستند را از فضای نمونه کنار می‌گذاریم:

$$n(S_{\text{new}}) = 36 - (4 \times 4) = 20$$

در این فضای نمونه جدید، پیشامد این که مجموع اعداد ظاهر شده مضرب ۳ باشد، یعنی مجموع دو عدد برابر ۳ و ۶ و ۹ یا ۱۲ باشد به صورت مقابل است و داریم:

$$A = \{(3,3), (3,6), (6,3), (6,6)\} \Rightarrow p = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

کیسه‌ها را ببینید:

۱۶۷



مهره خارج شده از کیسه A با احتمال $\frac{2}{5}$ قرمز و با احتمال $\frac{3}{5}$ آبی است. حالا هر حالت را بررسی می‌کنیم:

$$P = \frac{2}{5} \times \frac{n+1}{n+3} + \frac{3}{5} \times \frac{n}{n+3} = \frac{17}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{(2n+2) + 3n}{5n+15} = \frac{17}{30} \Rightarrow 150n + 60 = 85n + 255$$

$$\Rightarrow 65n = 195 \Rightarrow n = 3$$

پس در کیسه دوم ۳ مهره قرمز و ۲ مهره آبی، یعنی $3+2=5$ مهره داریم.

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$P(A) = 0/7, P(B) = 0/5, P(B|A) = 0/5 - 0/2 = 0/3$$

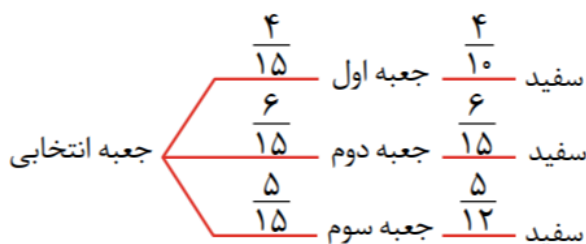
۱۶۸

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = 0/7 \times 0/3 = 0/21$$

$$P(A' | B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - (0/7 + 0/5 - 0/21)}{1 - 0/5} = \frac{0/1}{0/5} = 0/2$$

یعنی ۲ درصد.

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$P(\text{سفید}) = \frac{4}{15} \times \frac{4}{10} + \frac{6}{15} \times \frac{6}{15} + \frac{5}{15} \times \frac{5}{12}$$

$$= \frac{8}{75} + \frac{4}{25} + \frac{5}{36}$$

$$= \frac{96 + 144 + 125}{900} = \frac{365}{900} = \frac{73}{180}$$

۱۶۹

۱۷۰

نکته (احتمال یک پیشامد): اگر A پیشامدی در فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه احتمال رخداد پیشامد A را با $P(A)$ نمایش داده و برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$n(A)$: تعداد اعضای پیشامد A

$n(S)$: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

مهره‌های ۲، ۳، ۵، ۷، مهره‌هایی با شماره اول و مهره‌های ۱، ۴، ۶، ۸، ۹، مهره‌هایی با شماره غیر اول هستند.

مطابق با اطلاعات مسئله باید در میان ۴ مهره خارج شده، ۲، ۳ یا ۴ مهره با شماره اول باشد، پس داریم:

$$n(S) = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \times 5!} = 126$$

$$n(A) = \binom{4}{2} \binom{5}{2} + \binom{4}{3} \binom{5}{1} + \binom{4}{4} = 60 + 20 + 1 = 81$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{81}{126} = \frac{9}{14}$$

با توجه به نکته، خواهیم داشت:

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۱

نکته (احتمال یک پیشامد): اگر A پیشامدی در فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه احتمال رخداد پیشامد A را با $P(A)$ نمایش داده و برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$n(A)$: تعداد اعضای پیشامد A

$n(S)$: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

در پرتاب دو تاس، فضای نمونه‌ای $6 \times 6 = 36$ عضو دارد.

برای آنکه عددی مضرب ۶ باشد، باید زوج باشد و بر ۳ بخش‌پذیر باشد، پس اعداد مجموعه زیر مطلوب هستند:

$$A = \{12, 24, 42, 36, 54, 66\}$$

$$n(A) = 6, \quad n(S) = 36 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۲

نکته: منظور از «احتمال A به شرط B» که آن را با $P(A | B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آن که بدانیم پیشامد B رخ داده است.

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نکته: مستقل بودن A از B معادل است با اینکه:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، B', A' و همچنین B, A' و نیز B', A' مستقل هستند.

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \quad \text{نکته}$$

از آنجایی که A و B، مستقل از یکدیگرند، پس A' و B هم مستقل از هم هستند و داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (*)$$

$$P(B \cap A') = P(B) \times P(A') \quad (**)$$

با توجه به نکات و اطلاعات مسئله، داریم:

$$P(B | A') = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{3}{4} \xrightarrow{(**)} \frac{P(B) \times P(A')}{P(A')} = \frac{3}{4} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{4}$$

و در نهایت خواهیم داشت:

$$\frac{P(A - B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} \stackrel{(*)}{=} \frac{P(A) - P(A) \times P(B)}{P(A)} = \frac{P(A)(1 - P(B))}{P(A)} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۳

نکته: احتمال اینکه هیچ یک از پیشامدهای A و B رخ ندهند را با $P(A' \cap B')$ نمایش داده و برابر است با:

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

نکته: منظور از «احتمال A به شرط B» که آن را با $P(A | B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آن که بدانیم پیشامد B رخ داده است.

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

با توجه به نکات داریم:

$$\frac{7}{15} = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

بنابراین:

$$P(A | B) + P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{11}{10} = 1.1$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۴

نکته: منظور از «احتمال A به شرط B» که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آن که بدانیم پیشامد B رخ داده است.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

اگر A را پیشامد آن که مجموع اعداد روشده دو تاس ۵ یا ۸ باشد در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$A = \{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2), (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\} \Rightarrow n(A) = 9$$

اگر پیشامد آن که هر دو عدد روشده زوج نباشند را B بنامیم، آنگاه:

$$A \cap B = \{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2), (3,5), (5,3)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 6$$

احتمال اینکه هر دو عدد روشده زوج نباشند به شرط اینکه مجموع آن‌ها ۵ یا ۸ باشد، معادل $P(B|A)$ است که با توجه به نکته برابر است با:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۵

نکته: اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

به کمک نمودار درختی و با توجه به قانون احتمال کل، داریم:



و در نهایت، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

دقت کنید در پرتاب سه سکه، برای محاسبه احتمال دقیقاً ۲ بار پشت ظاهر شدن سکه، باید دو سکه‌ای که قرار است پشت ظاهر شوند را

انتخاب کنیم، که تعداد آن برابر $\binom{3}{2}$ است.

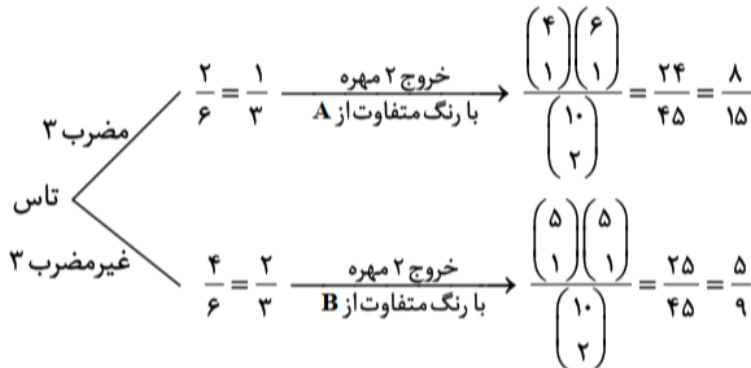
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۶

نکته: اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)$$

به کمک نمودار درختی و با توجه به قانون احتمال کل، داریم:



و در نهایت خواهیم داشت:

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{45} + \frac{8}{45} = \frac{16}{45}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۷

تعداد کل حالات در پرتاب سه تاس برابر $6 \times 6 \times 6 = 6^3$ است.

برای شمارش تعداد حالات مطلوب، کافی است سه عدد متمایز از بین شش عدد ۱ تا ۶ انتخاب کنیم. در این صورت بزرگ‌ترین عدد حتماً عدد مربوط به تاس سبز، کوچک‌ترین عدد مربوط به تاس قرمز و عدد وسطی مربوط به تاس آبی است. بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{6}{3}}{6^3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3! \times 6 \times 6 \times 6} = \frac{5 \times 4}{6 \times 3 \times 6} = \frac{5}{6 \times 9} = \frac{5}{54}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۸

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای که جایگشت‌های اعداد ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ است، برابر ۵! است.

می‌خواهیم ۴ و ۵ کنار هم باشند ولی ۲ و ۳ کنار هم نباشند، پس داریم:

حالت اول:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = 4 \\ \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = 4 \end{array} \right. \xrightarrow{+} \text{حالت ۸}$$

حالت دوم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = 8 \\ \frac{2}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = 8 \end{array} \right. \xrightarrow{+} \text{حالت ۱۶}$$

عدد ۱ یا یکی
از اعداد {۲, ۳}

پس تعداد کل حالات برابر ۲۴ است و احتمال این پیشامد برابر است با:

$$P(A) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۹

ابتدا $P(A')$ را به دست می‌آوریم:

$$P(A) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

اکنون با استفاده از فرض سؤال و با توجه به اینکه $P(B \cap A') = P(B - A)$ داریم:

$$P(B|A') = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B - A)}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{7} \Rightarrow P(B - A) = \frac{2}{7}$$

از طرفی می‌دانیم:



$$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$$

حال خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + \underbrace{P(B) - P(A \cap B)}_{P(B - A)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{7} = \frac{7+6}{21} = \frac{13}{21}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۰

دو پیشامد A و B مستقل هستند، پس پیشامدهای A و B' نیز مستقل هستند و داریم:

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A) \cdot P(B')}{P(B')} = P(A)$$

$$P(B'|A) = \frac{P(B' \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B') \cdot P(A)}{P(A)} = P(B')$$

همچنین A و A' ناسازگار هستند ($A \cap A' = \emptyset$): پس:

$$P(A|A') = \frac{P(A \cap A')}{P(A')} = \frac{P(\emptyset)}{P(A')} = 0$$

بنابراین طبق رابطه داده شده، داریم:

$$P(A|B') + P(A|A') = P(B'|A) + \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) + 0 = P(B') + \frac{1}{3} \xrightarrow{P(B')=1-P(B)} P(A) = 1 - P(B) + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) = \frac{4}{3} \quad (۱)$$

همچنین پیشامدهای A' و B' نیز مستقل هستند. بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$P(A'|B') + P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} + \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{P(A') \cdot P(B')}{P(B')} + \frac{P(B') \cdot P(A')}{P(A')}$$

$$= P(A') + P(B') = 1 - P(A) + 1 - P(B) = 2 - (P(A) + P(B))$$

مقدار به دست آمده طبق رابطه (۱) برابر است با:

$$2 - (P(A) + P(B)) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۱

پیشامد هم‌رنگ بودن هر سه مهره را A و پیشامد فرد بودن تعداد مهره‌های زرد خارج شده را B می‌نامیم. احتمال خواسته شده، احتمال A به شرط B است.

ابتدا تعداد اعضای پیشامد B را به دست می‌آوریم. در این پیشامد تعداد مهره‌های زرد برابر یک یا برابر سه است؛ پس:

$$n(B) = \binom{4}{3} + \binom{4}{1} \times \binom{6}{2} = 4 + 4 \times 15 = 64$$

اکنون تعداد اعضای پیشامد $A \cap B$ را به دست می‌آوریم. اشتراک دو پیشامد A و B به معنای آن است که هر سه مهره زردرنگ باشند؛ پس:

$$n(A \cap B) = \binom{4}{3} = 4$$

بنابراین احتمال A به شرط B برابر است با:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۲

فرض می‌کنیم احتمال موفقیت علی در این آزمون $P(A) = x$ باشد، پس احتمال موفقیت رضا در این آزمون برابر $P(R) = 3x$ ($0 \leq 3x \leq 1$) است. از طرفی قبولی علی و رضا در این آزمون دو پیشامد مستقل از هم‌اند، پس داریم:

$$P(A \cap R) = P(A) \cdot P(R) = 3x^2 \quad (*)$$

احتمال موفقیت دقیقاً یکی از آن‌ها در این آزمون برابر $\frac{7}{24}$ است؛ بنابراین:

$$P(A - R) + P(R - A) = P(A \cup R) - P(A \cap R) = \frac{7}{24}$$

$$\Rightarrow P(A) + P(R) - P(A \cap R) - P(A \cap R) = \frac{7}{24}$$

$$\xrightarrow{(*)} x + 3x - 6x^2 = \frac{7}{24} \Rightarrow 6x^2 - 4x + \frac{7}{24} = 0 \xrightarrow{\Delta = 16 - 7 = 9} x = \frac{4 \pm 3}{12}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{12} \quad \times \quad (x = \frac{7}{12} \Rightarrow 3x > 1 \text{ غ ق ق ۱}) \\ x = \frac{1}{12} \quad \checkmark \end{cases}$$

پس خواسته سؤال برابر است با:

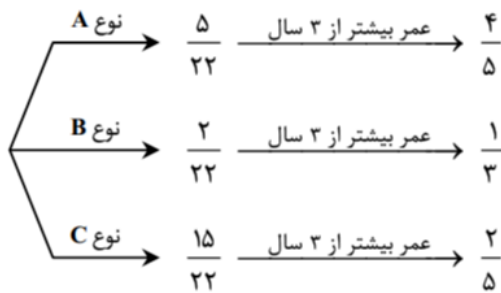
$$P(A \cap R) = 3x^2 = 3 \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{48}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۳

در جعبه، $5 + 2 + 15 = 22$ ساعت مچی وجود دارد، پس احتمال اینکه ساعت‌ها از نوع A، B یا C باشند، به ترتیب $\frac{5}{22}$ ، $\frac{2}{22}$ و $\frac{15}{22}$ است.

حال با استفاده از نمودار درختی داریم:



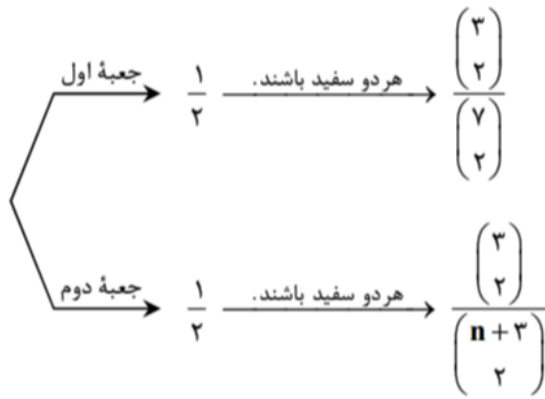
بنابراین احتمال موردنظر برابر است با:

$$\text{احتمال عمر بیشتر از ۳ سال} = \frac{5}{22} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{22} \times \frac{1}{3} + \frac{15}{22} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{11} + \frac{1}{33} + \frac{3}{11} = \frac{5}{11} + \frac{1}{33} = \frac{16}{33}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۴

با رسم نمودار درختی داریم:



حال داریم:

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{n+3}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{21} + \frac{3}{\frac{(n+3)(n+2)}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} + \frac{6}{(n+3)(n+2)} \right) = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{(n+3)(n+2)} = \frac{3}{28} \Rightarrow (n+3)(n+2) = 56 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n+3 = 8 \Rightarrow n = 5$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۵

نکته ۱: در یک آزمایش تصادفی، مجموعه همه نتایج ممکن را «فضای نمونه‌ای» می‌نامیم.

نکته ۲: هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای را یک «پیشامد» می‌نامیم.

نکته ۳: احتمال پیشامد A در فضای نمونه‌ای S برابر است با: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n(S) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = 56$$

اینکه دقیقاً دو مهره هم‌رنگ باشند، یعنی دو مهره سفید و یک مهره غیرسفید باشد، یا دو مهره قرمز و یک مهره غیرقرمز باشد و یا دو مهره سبز و یک مهره غیرسبز باشد. بنابراین داریم:

$$n(A) = \binom{3}{2} \binom{5}{1} + \binom{2}{2} \binom{6}{1} + \binom{3}{2} \binom{5}{1} = 3 \times 5 + 1 \times 6 + 3 \times 5 = 36$$

در نتیجه احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۶

نکته ۱: تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه Ω عضوی برابر 2^n است.

نکته ۲: تعداد زیرمجموعه‌های 1^* عضوی یک مجموعه Ω عضوی از رابطه $\binom{n}{r}$ به دست می‌آید.

نکته ۳: با توجه به تعداد کل زیرمجموعه‌ها و تعداد زیرمجموعه‌های 1^* عضوی یک مجموعه Ω عضوی داریم:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

با توجه به نکات داریم:

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 7\} \Rightarrow \text{تعداد کل زیرمجموعه‌ها} = n(S) = 2^7 = 128$$

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های حداقل ۲ عضوی} = n(A) = \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \dots + \binom{7}{7} = 2^7 - \binom{7}{0} - \binom{7}{1}$$

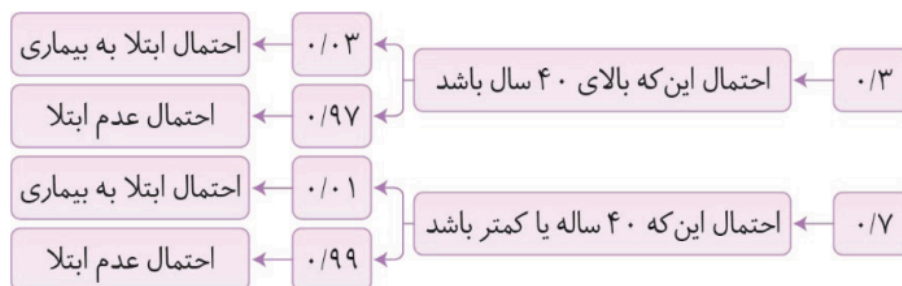
$$\Rightarrow n(A) = 128 - 1 - 7 = 120 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{120}{128} = \frac{15}{16}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۷

باتوجه به صورت سؤال ۳۰ درصد افراد این جامعه بالای ۴۰ سال سن دارند و ۷۰ درصد افراد، ۴۰ سال یا کمتر از ۴۰ سال سن دارند.

پس با کمک نمودار درختی داریم:



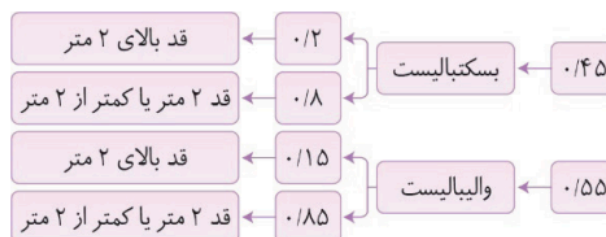
پس باتوجه به قانون احتمال کل، احتمال مبتلا بودن به بیماری خاص در این جامعه برابر است با:

$$P(A) = (0.3 \times 0.3) + (0.7 \times 0.1) = 0.16$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۸

با استفاده از نمودار درختی داریم:



بنابراین به کمک قانون احتمال کل این که فرد انتخابی قدی بالای ۲ متر داشته باشد، برابر است با:

$$P(A) = \left(\frac{45}{100} \times \frac{2}{10}\right) + \left(\frac{55}{100} \times \frac{15}{100}\right) = \frac{1725}{10000} = 0.1725$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۹

در این جعبه، ۵ ساعت از نوع A، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد، پس مجموعاً $5 + 2 + 15 = 22$ ساعت در این جعبه وجود دارد. بنابراین احتمال انتخاب ساعت نوع A برابر $\frac{5}{22}$ ، احتمال انتخاب ساعت نوع B برابر $\frac{2}{22}$ و احتمال انتخاب ساعت نوع C برابر $\frac{15}{22}$ است.

حالا با کمک نمودار درختی داریم:



پس احتمال این که ساعت انتخاب شده دارای عمر بیشتر از ۱۰ سال باشد، برابر است با:

$$P(A) = \left(\frac{5}{22} \times \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{2}{22} \times \frac{9}{10}\right) + \left(\frac{15}{22} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{40 + 18 + 75}{220} = \frac{133}{220}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۰

اگر تعداد کل دانش آموزان این مدرسه را x در نظر بگیریم، تعداد دانش آموزان پایه دهم برابر $\frac{x}{3}$ ، تعداد دانش آموزان پایه یازدهم برابر $\frac{x}{3}$ و تعداد دانش آموزان پایه دوازدهم برابر $\frac{x}{6}$ است. پس باتوجه به نمودار درختی داریم:



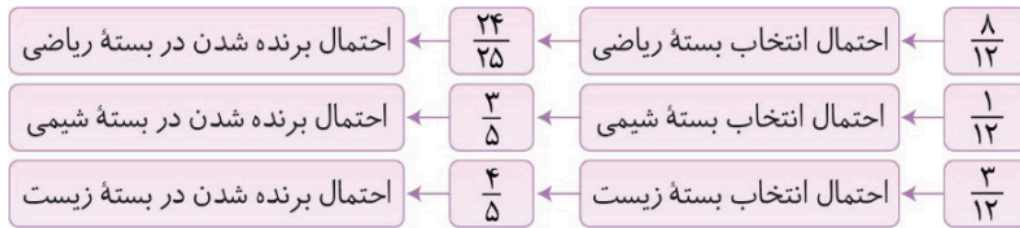
که رشته ورزشی فرد انتخاب

$$P(A) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{30}{100}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{25}{100}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{20}{100}\right) = \frac{9 + 5 + 2}{60} = \frac{4}{15}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۱

زاویه مربوط به بخش شیمی برابر 30° و زاویه مربوط به بخش زیست برابر 90° است. پس زاویه مربوط به بخش ریاضی 240° است. باتوجه به شکل، احتمال انتخاب بسته شیمی $\frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{12}$ ، احتمال انتخاب بسته زیست $\frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{3}{12}$ و احتمال انتخاب بسته ریاضی $\frac{240^\circ}{360^\circ} = \frac{8}{12}$ است. با رسم نمودار درختی داریم:



احتمال برنده شدن آوا در این مسابقه برابر است با:

$$P = \left(\frac{8}{12} \times \frac{24}{25}\right) + \left(\frac{1}{12} \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{12} \times \frac{4}{5}\right) = \frac{89}{100} = 0.89$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۲

سکه اول با احتمال $\frac{1}{4}$ «رو» و با احتمال $\frac{1}{4}$ «پشت» ظاهر می شود. اگر سکه اول «رو» بیاید، دو سکه دیگر پرتاب می کنیم که باید یکی از آن ها «رو» بیایند. یعنی حالت های (پ، ر)، (ر، ر)، (ر، پ) ظاهر شوند. اما اگر سکه اول «پشت» ظاهر شود، سه سکه دیگر پرتاب می کنیم که باید دو تای آن ها «رو» ظاهر شود. توجه کنید فضای نمونه پرتاب ۳ سکه دارای $2^3 = 8$ عضو است و در سه حالت (ر، ر، پ)، (ر، پ، ر)، (پ، ر، ر) دقیقاً ۲ بار «رو» ظاهر می شود. حالا با کمک نمودار درختی داریم:



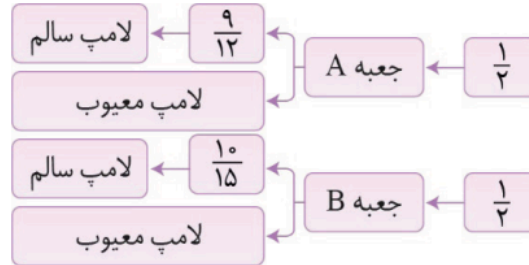
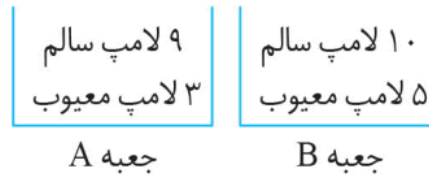
پس با کمک قانون احتمال کل، احتمال این که دقیقاً ۲ بار «رو» ظاهر شود برابر است با:

$$P(A) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{8}\right) = \frac{7}{16}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۳

می دانیم احتمال انتخاب هر جعبه برابر $\frac{1}{2}$ است، پس با کمک نمودار درختی داریم:



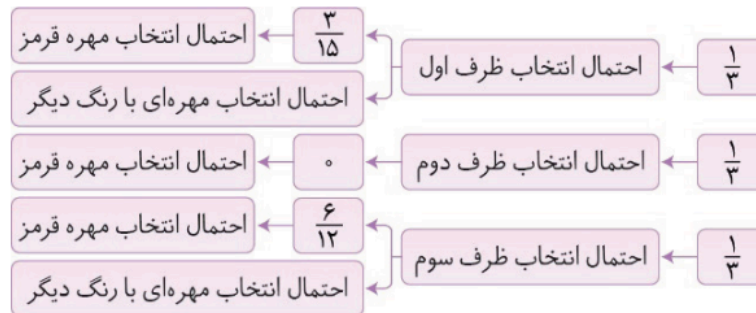
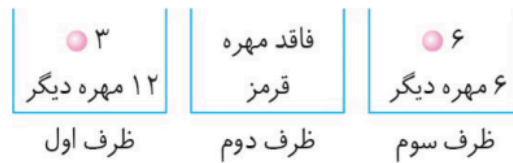
بنابراین به کمک قانون احتمال کل، احتمال انتخاب لامپ سالم برابر است با:

$$P(A) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{9}{12}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{10}{15}\right) = \frac{9}{24} + \frac{10}{24} = \frac{19}{24}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۴

احتمال انتخاب هر ظرف یکسان و برابر $\frac{1}{3}$ است. با رسم نمودار درختی، داریم:

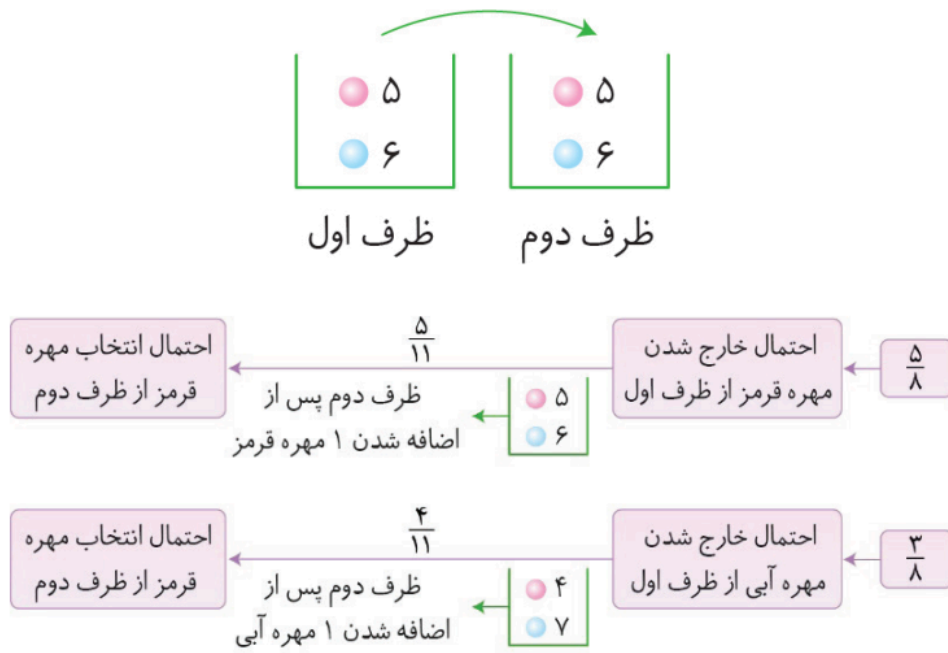


بنابراین به کمک قانون احتمال کل، احتمال انتخاب مهره قرمز برابر است با:

$$P(A) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{15}\right) + \left(\frac{1}{3} \times 0\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{6}{12}\right) = \frac{2}{30} + 0 + \frac{5}{30} = \frac{7}{30}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

چون رنگ مهره انتخاب شده از ظرف اول مشخص نیست، با رسم نمودار درختی احتمال خارج شدن مهره قرمز از ظرف دوم را به دست می آوریم:



بنابراین به کمک قانون احتمال کل، احتمال انتخاب مهره قرمز رنگ از ظرف دوم برابر است با:

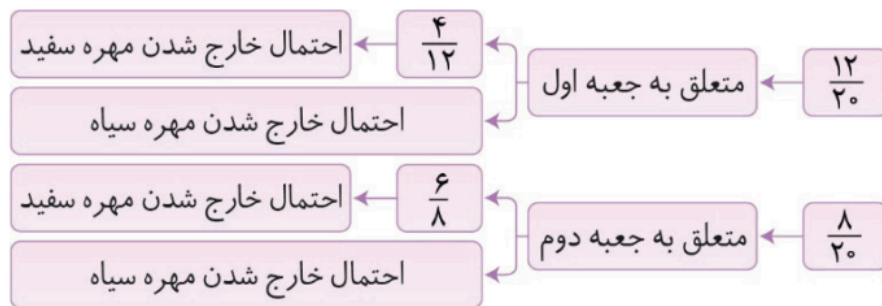
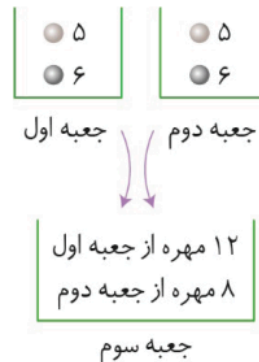
$$P(A) = \left(\frac{5}{8} \times \frac{5}{11}\right) + \left(\frac{3}{8} \times \frac{4}{11}\right) = \frac{25}{88} + \frac{12}{88} = \frac{37}{88}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۶

آ) مطابق شکل، ۱۲ مهره از جعبه اول و ۸ مهره از جعبه دوم در جعبه سوم می ریزیم. مهره انتخاب از جعبه سوم با احتمال $\frac{۱۲}{۲۰}$ متعلق به جعبه اول و با احتمال $\frac{۸}{۲۰}$ متعلق به جعبه دوم است.

ب) با کمک نمودار درختی احتمال خارج شدن مهره سفید از جعبه سوم را پیدا می کنیم:



پس باتوجه به قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = \left(\frac{۱۲}{۲۰} \times \frac{۴}{۱۲}\right) + \left(\frac{۸}{۲۰} \times \frac{۶}{۸}\right) = \frac{۴}{۳۰} + \frac{۹}{۳۰} = \frac{۱۳}{۳۰} = \frac{۱}{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۱,۴)	(۱,۵)	(۱,۶)
(۲,۱)	(۲,۲)	(۲,۳)	(۲,۴)	(۲,۵)	(۲,۶)
(۳,۱)	(۳,۲)	(۳,۳)	(۳,۴)	(۳,۵)	(۳,۶)
(۴,۱)	(۴,۲)	(۴,۳)	(۴,۴)	(۴,۵)	(۴,۶)
(۵,۱)	(۵,۲)	(۵,۳)	(۵,۴)	(۵,۵)	(۵,۶)
(۶,۱)	(۶,۲)	(۶,۳)	(۶,۴)	(۶,۵)	(۶,۶)

$\Rightarrow n(A) = ۲۰$

پیشامد موردنظر به صورت زیر است:

۱۹۷

بنابراین $p(A) = \frac{۲۰}{۳۶} = \frac{۵}{۹}$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

پیشامد این که حداقل یک تیر به هدف برخورد کند، متمم پیشامدی است که تیر هیچ کدام از آن ها به هدف اصابت نکند:

$$p(A) = 1 - p(A') = 1 - \left(\frac{۳}{۴} \times \frac{۴}{۵} \times \frac{۱}{۲}\right) = \frac{۷}{۱۰}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۸

نکته اگر n سکه را پرتاب کنیم، احتمال آن که k سکه رو ظاهر شود برابر است با: $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

گام اول: در حالتی که اختلاف اعداد رو شده در دو تاس، کوچکتر یا مساوی یک باشد ($m \leq 1$) باید دو وضعیت $m = 1$ و

$m = 0$ را در نظر گرفت به طوری که اگر اختلاف اعداد رو شده در دو تاس صفر باشد ($m = 0$) به این معنی است که دو عدد رو شده یکسان

هستند؛ یعنی $\{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)\}$ که دارای ۶ حالت و احتمال $\frac{6}{36}$ است. اگر اختلاف دو عدد رو شده در دو تاس یک باشد ($m = 1$)

به این معنی است که دو عدد رو شده متوالی بوده‌اند؛ یعنی $\{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\}$

که دارای ۱۰ حالت است و احتمال آن $\frac{10}{36}$ خواهد بود. در این حالت‌ها اگر دو سکه را پرتاب کنیم، احتمال دو بار رو آمدن برابر $\frac{1}{4} = \frac{\binom{2}{2}}{2^2}$ است.

گام دوم: در حالتی که اختلاف دو عدد رو شده در دو تاس بین ۱ تا ۳ باشد ($1 < m < 3$) به این معنی است که $m = 2$ است؛ یعنی

$\{(1,3), (3,1), (2,4), (4,2), (3,5), (5,3), (4,6), (6,4)\}$ که احتمال آن $\frac{8}{36}$ خواهد بود. در این حالت اگر سه سکه را پرتاب کنیم،

احتمال دو بار رو آمدن برابر $\frac{3}{8} = \frac{\binom{3}{2}}{2^3}$ است.

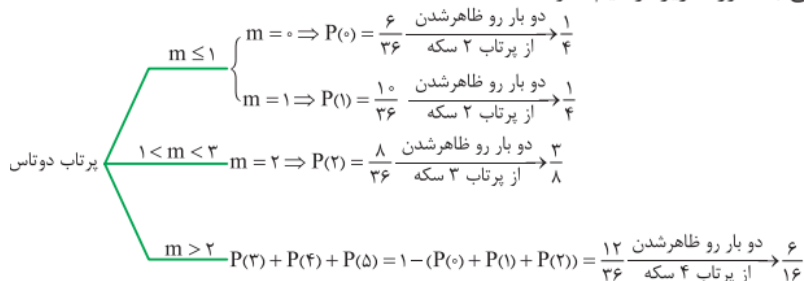
گام سوم: در حالتی که اختلاف دو عدد رو شده در دو تاس بیشتر از ۲ باشد، یعنی ۴ یا ۵ یا ۳، $m = 3$ می‌توانیم از احتمال متمم استفاده کنیم و احتمال

مربوط به $m = 0, 1, 2$ را که در دو قسمت قبلی محاسبه کردیم از احتمال ۱۰۰ درصد یا ۱ کم کنیم؛ یعنی:

$$1 - \left(\frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} \right) = \frac{12}{36}$$

در این حالت اگر ۴ سکه را پرتاب کنیم احتمال دو بار رو آمدن برابر است با: $\frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{6}{16}$

گام چهارم: برای توضیحات در گام اول و دوم می‌توان نمودار درختی به صورت زیر ترسیم نمود:



$$P(A) = \left(\frac{6}{36} + \frac{10}{36} \right) \left(\frac{1}{4} \right) + \left(\frac{8}{36} \right) \left(\frac{3}{8} \right) + \left(\frac{12}{36} \right) \left(\frac{6}{16} \right) = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{23}{72}$$

گام پنجم: بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۰

حالت‌های ممکن به صورت زیر هستند که کوچک‌ترین عضو و بزرگ‌ترین عضو را مشخص کرده‌ایم و اعضا را به ترتیب صعودی در نظر گرفته‌ایم.

$$A_1 = \{4, -, -, -, -, -, -, -, -, 14\}$$

$$A_2 = \{3, -, -, -, -, -, -, -, -, 13\}$$

$$A_3 = \{2, -, -, -, -, -, -, -, -, 12\}$$

$$A_4 = \{1, -, -, -, -, -, -, -, -, 11\}$$

در هر مورد، ۹ عضو می‌تواند بین کوچک‌ترین عضو و بزرگ‌ترین عضو قرار بگیرد. هر کدام از این عضوها می‌توانند در مجموعه موردنظر بیایند یا نه. پس هر

عضو دو حالت و در کل 2^9 حالت وجود دارد، پس هر کدام از مجموعه‌های A_1 تا A_4 می‌توانند به 2^9 حالت تشکیل شوند و در کل $4 \times 2^9 = 2^{11}$ مجموعه با ویژگی موردنظر وجود دارد.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۱

این تابع به صورت $f = \{(2, a), (3, b), (4, c)\}$ است که در آن:

$$a > 4 \Rightarrow a \in \{5, 6, \dots, 20\}$$

$$b > 9 \Rightarrow b \in \{10, 11, \dots, 20\}$$

$$c > 16 \Rightarrow c \in \{17, 18, 19, 20\}$$

بنابراین a می‌تواند ۱۶ حالت، b می‌تواند ۱۱ حالت و c می‌تواند ۴ حالت داشته باشد.

پس تعداد توابع موردنظر برابر است با:

$$16 \times 11 \times 4 = 704$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۲

تعداد جایگشت‌هایی که حرف A و B کنار یکدیگر قرار دارند برابر $2 \times 5!$ است. در نیمی از این جایگشت‌ها بسته A و B قبل از F قرار دارد و در نیمی دیگر بعد از آن قرار دارد، بنابراین تعداد جایگشت‌های موردنظر برابر $5!$ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۳

به دو روش می‌توان این را انجام داد.

روش اول: سه عدد فرد از بین اعداد $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ انتخاب کنیم که تعداد انتخاب‌ها برابر $\binom{5}{3}$ است.

روش دوم: دو عدد زوج از بین اعداد $\{2, 4, 6, 8\}$ و یک عدد فرد از اعداد $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ انتخاب کنیم که تعداد انتخاب‌ها برابر $\binom{4}{2} \binom{5}{1}$ است، بنابراین تعداد

$$\binom{5}{3} + \binom{4}{2} \binom{5}{1} = 10 + 30 = 40$$

کل انتخاب‌ها برابر است با:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۴

تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی یک مجموعه $2n$ عضوی برابر $\binom{2n}{3}$ است، پس:

$$\frac{(2n)!}{(2n-3)!3!} = 120 \Rightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 120$$

$$\Rightarrow 2n^3 - 6n^2 + 2n - 360 = 0 \Rightarrow 2n^3 - 3n^2 + n - 180 = 0$$

$$\Rightarrow 2n^3 - 10n^2 + 7n^2 + n - 180 = 0 \Rightarrow 2n^2(n-5) + (7n+36)(n-5) = 0$$

$$\Rightarrow (n-5)(2n^2 + 7n + 36) = 0 \Rightarrow n = 5$$

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210$$

بنابراین مجموعه موردنظر ۱۰ عضوی است و تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی آن برابر است با:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۵

ابتدا دو جفت کفش را از بین ۸ جفت کفش انتخاب می‌کنیم، این کار به $\binom{8}{2}$ حالت امکان‌پذیر است.

اکنون دو جفت کفش را از بین ۶ جفت کفش باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم و از هر کدام از جفت‌های انتخاب شده یک لنگه را انتخاب می‌کنیم. این کار به $\binom{6}{2} \binom{2}{1} \binom{2}{1}$ حالت امکان‌پذیر است.

$$\binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{2}{1} \binom{2}{1} = 28 \times 15 \times 2 \times 2 = 1680$$

بنابراین تعداد راه‌های انتخاب موردنظر برابر است با:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۶

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر تعداد حالت‌های انتخاب ۲ شیء از ۱۲ شیء است که برابر است با: $\binom{12}{2}$.

تعداد اعضای پیشامد هم‌رنگ بودن مهره‌ها برابر است با:

$$\binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2}$$

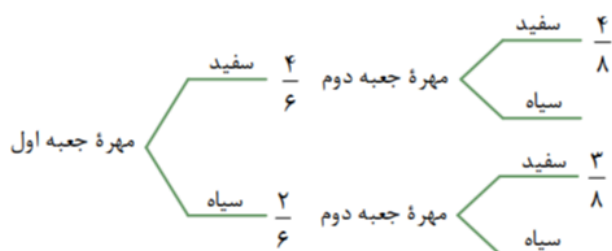
هر دو آبی هر دو سفید هر دو قرمز

$$\frac{\binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{3 + 6 + 10}{66} = \frac{19}{66}$$

بنابراین احتمال موردنظر برابر است با:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۷



$$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{4} = \frac{11}{24}$$

با توجه به نمودار درختی بالا و طبق قانون احتمال کل، احتمال پیشامد موردنظر برابر است با:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

اگر عبارت زیر رادیکال دوم را مخرج مشترک بگیریم، به عبارت $\frac{9x-8}{9x}$ می‌رسیم حالا از آنجا که معکوس این عبارت هم در زیر رادیکال اول قرار داد، از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{9x}{9x-8}} = T \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{8}{9x}} = \sqrt{\frac{9x-8}{9x}} = \frac{1}{T}$$

پس داریم:

$$T + 6\left(\frac{1}{T}\right) = 9 \xrightarrow{\times T} T^2 - 9T + 6 = 0 \Rightarrow (T-3)^2 = 0 \Rightarrow T = 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{9x}{9x-8}} = 3 \Rightarrow \frac{9x}{9x-8} = 9 \Rightarrow \frac{x}{9x-8} = 1 \Rightarrow x = 9x-8 \Rightarrow x = 1$$

پس پیشامد مطلوب $A = \{1\}$ و فضای نمونه‌ای این احتمال شرطی، $S = \{1, 4, 6\}$ است و احتمال موردنظر برابر با $\frac{1}{3}$ است.

روش دوم: می‌توانیم اعداد غیر اول ریشه در پرتاب تاس یعنی $x = 1, 4, 6$ را در معادله جایگزین کنیم و ببینیم کدام یک در معادله صدق می‌کنند.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

حالت (A) اگر هر ۵ مرد را یک دسته و هر ۳ زن را یک دسته در نظر بگیریم، تعداد حالات قرار گرفتن افراد هم‌جنس کنار هم، $n(A) = 2! \times 3! \times 5!$ است:



حالت (B) اگر بخواهیم هیچ دو زن کنار هم نباشند، ۵ مرد را مانند یک دیوار در نظر گرفته و ۳ زن را در ۶ فضای خالی بین مردها قرار می‌دهیم:

$$n(B) = \binom{6}{3} \times 3! \times 5!$$

جابه‌جایی زن‌ها جابه‌جایی مردها

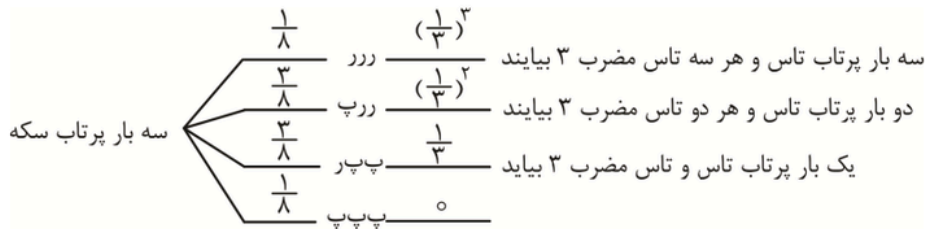
نهایتاً داریم:

$$\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{n(B)}{n(A)} = \frac{\binom{6}{3} \times 3! \times 5!}{2! \times 3! \times 5!} = \frac{\binom{6}{3}}{2} = 10$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

با استفاده از نمودار درختی داریم:

۲۱۰



$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{8} (0)$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{27}\right) + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{1}{8} \left(\frac{1+9+27}{27}\right) = \frac{1}{8} \left(\frac{37}{27}\right) = \frac{37}{216}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ابتدا تعداد کل حالات را حساب می‌کنیم:

۲۱۱

$$\binom{15}{3} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3!} = 5 \times 7 \times 13 = 455$$

برای پیدا کردن تعداد حالات مطلوب کافی است حالت انتخاب ۱ مهره از هر رنگ را از کل حالات کم کنیم:

$$455 - \binom{4}{1} \binom{5}{1} \binom{6}{1} = 455 - 120 = 335$$

$$\frac{335}{455} = \frac{67}{91}$$

بنابراین احتمال برابر است با:

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

راه‌حل اول:

۲۱۲

اگر پسر اول روی یک صندلی بنشیند، پسر دوم می‌تواند روی ۲ صندلی از چهار صندلی باقی‌مانده بنشیند؛ بنابراین احتمال

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

برابر است با:

n نفر می‌توانند به $(n-1)!$ حالت دور یک میز بنشینند، بنابراین تعداد حالات کل برابر $4! = (5-1)!$ است. برای پیدا

کردن تعداد حالات مطلوب، دو پسر را یک نفر (یک بسته) در نظر می‌گیریم و تعداد را حساب می‌کنیم (جایگشت دو پسر را نیز باید حساب کنیم):

$$(4-1)! \times 2! = 3! \times 2!$$

$$1 - \frac{3! \times 2!}{4!} = \frac{1}{2}$$

بنابراین احتمال خواسته‌شده در سوال برابر است با:

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۳ با توجه به داده‌های صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,1 \\ P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0,2 \end{cases} \Rightarrow P(A) + P(B) = 0,3 + 2P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 \Rightarrow P(A) + P(B) = 0,4 + P(A \cap B)$$

بنابراین داریم:

$$0,4 + P(A \cap B) = 0,3 + 2P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0,1$$

حال خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \xrightarrow{P(B) - P(A \cap B) = 0,2, P(A \cap B) = 0,1} P(A | B) = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

در هر جایگاه اعداد ۲، ۳، ۵ و ۷ می‌توانند قرار بگیرند. پس تعداد حالات کل برابر با $4^3 = 64$ است.

برای اینکه عدد سه رقمی بر ۳ بخش پذیر باشد، باید مجموع اعداد مضرب ۳ باشد. در کمترین حالت مجموع برابر ۶ (رمز = ۲۲۲) و در بزرگترین حالت مجموع برابر ۲۱ (رمز = ۷۷۷) است. بنابراین حالات ممکن برای مجموع ۶، ۹، ۱۲، ۱۵، ۱۸ و ۲۱ هستند.

$$6: 222 \rightarrow 1$$

حالت ۳

$$9: 333, 225 \rightarrow 1 + 3 = 4$$

حالت ۳! حالت ۳!

$$12: 237, 255 \rightarrow 3! + 3 = 9$$

حالت ۳! حالت ۳!

$$15: 555, 375 \rightarrow 1 + 3! = 7$$

$$18:$$

$$21: 777 \rightarrow 1$$

بنابراین ۲۲ حالت مطلوب هستند و احتمال خواسته شده برابر با $\frac{22}{64} = \frac{11}{32}$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۵ برای پیدا کردن احتمال آنکه در این ۵ کفش حداقل یک جفت وجود داشته باشد، حالت متمم یعنی هیچ جفتی وجود نداشته باشد را حساب می‌کنیم و از ۱ کم می‌کنیم. ابتدا ۵ جفت کفش انتخاب می‌کنیم و از هر جفت یک لنگه را انتخاب می‌کنیم:

$$\frac{\binom{7}{5} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1}}{\binom{14}{5}} = \frac{\frac{7 \times 6}{2} \times 2^5}{\frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{5 \times 4 \times 3 \times 2}} = \frac{6 \times 7 \times 2^4}{14 \times 13 \times 11} = \frac{48}{143} \Rightarrow 1 - \frac{48}{143} = \frac{95}{143}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۶

به احتمال $\frac{2}{5}$ مهره اول سفید و به احتمال $\frac{3}{5}$ مهره اول قرمز است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\frac{2}{5}} \text{سفید} \rightarrow \frac{5}{10} \text{ قرمز بودن} \\ \xrightarrow{\frac{3}{5}} \text{قرمز} \rightarrow \frac{6}{10} \text{ قرمز بودن} \end{array} \right.$$

$$P(A) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{6}{10} = \frac{1}{5} + \frac{9}{25} = \frac{14}{25}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$P(A - B) + P(B - A) = 0.6 \Rightarrow (P(A) - P(A \cap B)) + (P(B) - P(A \cap B)) = 0.6$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0.6 \xrightarrow{\frac{P(A)=0.8}{P(B)=0.4}} 1.2 - 2P(A \cap B) = 0.6$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.3$$

از طرفی دیگر داریم:

$$P(B' \cap A) = P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.8 - 0.3 = 0.5$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

اگر قرار باشد با پرتاب دو تاس، مجموع اعداد ظاهر شده، اول شود، آن عدد اول می‌تواند یکی از اعداد ۲ یا ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ باشد، پس فضای نمونه‌ای مسئله برابر است با:

$$\left\{ \begin{array}{c} \xleftarrow{(1,1)} \xleftarrow{(1,2),(2,1)} \xleftarrow{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)} \xleftarrow{(1,6),(6,1),(5,2),(2,5),(3,4),(4,3)} \xleftarrow{(5,6),(6,5)} \\ \text{مجموع ۲} \quad \text{مجموع ۳} \quad \text{مجموع ۵} \quad \text{مجموع ۷} \quad \text{مجموع ۱۱} \end{array} \right.$$

این حالات بالا، مواردی که اعداد روشده متوالی هستند را در نظر می‌گیریم:

$$\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(5,6),(6,5)\} \rightarrow \text{حالت ۸}$$

پس احتمال موردنظر برابر با $\frac{8}{15}$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۸

فرض کنیم X مهره قرمز به ظرف اول اضافه کرده‌ایم، پس:

$$P(\text{آبی}) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{11+x}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{8}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{6}{11+x} + \frac{5}{8}\right)$$

$$P(\text{قرمز}) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{5+x}{11+x}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{5+x}{11+x} + \frac{3}{8}\right)$$

$$P(\text{آبی}) = P(\text{قرمز})$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{6}{11+x} + \frac{5}{8}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{5+x}{11+x} + \frac{3}{8}\right) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{x-1}{11+x} \Rightarrow 11+x = 4x-4 \Rightarrow x=5$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گزینه ۲ درست است.

ریشه‌های متمایز معادله $mx^2 - (m-3)x - 75 = 0$ را α و β در نظر گرفته و داریم:

$$\alpha^3 - \beta^3 = \alpha^2 - \beta^2 \Rightarrow (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

چون α و β متمایزند، پس عبارت $(\alpha - \beta)$ مخالف صفر بوده و با حذف آن از طرفین تساوی داریم:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = \alpha + \beta \Rightarrow$$

$$(s^2 - 2p) + p = s \Rightarrow s^2 - s - p = 0 \Rightarrow \left(\frac{m-3}{m}\right)^2 - \left(\frac{m-3}{m}\right) + \frac{3}{4m} = 0$$

با ضرب طرفین این معادله در m^2 داریم:

$$(m-3)^2 - (m-3)(m) + \frac{3}{4}m = 0 \Rightarrow (m^2 - 6m + 9) - (m^2 - 3m) + \frac{3}{4}m = 0$$

$$\frac{-9}{4}m + 9 = 0 \Rightarrow m = 4$$

بنابراین اگر تاس ۴ بیاید، رابطه برقرار است و لذا با احتمال $\frac{1}{6}$ این اتفاق می‌افتد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گزینه ۳ درست است. ۲۲۱

فضای نمونه‌ای پرتاب سه تاس، $6^3 = 216$ حالت دارد که در نیمی از این حالت‌ها، مجموع، عددی فرد می‌شود. پس:

$$n(s) = 108$$

وقتی مجموع سه تاس، فرد است، یکی از اعداد ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵ و ۱۷ می‌باشد که تمام آن‌ها در بازه $[4, 14]$ قرار دارند، به جز مجموع‌های ۳، ۱۵ و ۱۷ پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$1 - \left[\underbrace{P(3 = \text{مجموع سه تاس})}_{\substack{\text{یک حالت} \\ (1 \text{ و } 1 \text{ و } 1)}} + \underbrace{P(15 = \text{مجموع سه تاس})}_{\substack{\text{ده حالت} \\ (\text{بررسی کنید!})}} + \underbrace{P(17 = \text{مجموع سه تاس})}_{\substack{\text{سه حالت} \\ (5 \text{ و } 6 \text{ و } 6) \\ (6 \text{ و } 5 \text{ و } 6) \\ (6 \text{ و } 6 \text{ و } 5)}} \right]$$

$$= 1 - \left(\frac{1 + 10 + 3}{108} \right) = 1 - \frac{14}{108} = 1 - \frac{7}{54} = \frac{47}{54}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گزینه ۴ درست است.

مهره اول که بدون رؤیت از جعبه A خارج شده، تأثیری در فضای نمونه‌ای مسئله ندارد و مهم نیست. در مورد مهره دوم که از جعبه A خارج شده، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول:

مهره خارج شده از A سفید باشد ← احتمال: $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

- دو مهره سیاه به جعبه A اضافه می‌کنیم:



A

- یک مهره از جعبه A (سفید یا سیاه) خارج کرده و در جعبه B قرار می‌دهیم و سپس از جعبه B مهره سفید خارج می‌کنیم:



A



B

$$\frac{5}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{4}{10} = 0.45$$

سفید از جعبه دوم سیاه از جعبه اول سفید از جعبه دوم سفید از جعبه اول

پس احتمال کل در حالت اول برابر است با:

$$\frac{2}{3} \times 0.45 = 0.3$$

حالت دوم:

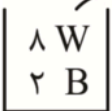
- مهره خارج شده از A سیاه باشد ← احتمال: $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$

- دو مهره سفید به ظرف A اضافه می‌کنیم:



A

یک مهره از جعبه A (سفید یا سیاه) خارج کرده و در جعبه B قرار می‌دهیم و سپس از جعبه B مهره سفید خارج می‌کنیم:



A



B

$$\frac{8}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{4}{10} = 0.48$$

سفید از جعبه دوم سیاه از جعبه اول سفید از جعبه دوم سفید از جعبه اول

پس احتمال کل در حالت دوم برابر است با:

$$\frac{1}{3} \times 0.48 = 0.16$$

جواب نهایی برابر است با:

$$0.3 + 0.16 = 0.46$$

گزینه ۲ درست است. ۲۲۳

با توجه به صفحه شطرنجی روبه‌رو از کل $n(S) = ۳۶$ حالت، ۱۲ تا مورد قبول است، پس $n(A) = ۱۲$ و بنابراین:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۳}$$

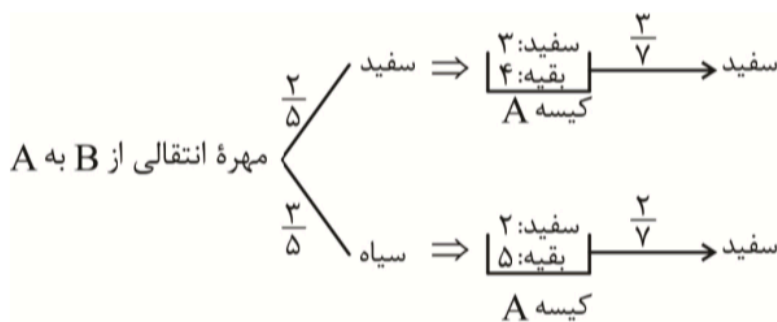
تاس اول ←

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱			✓	✓	✓	✓
۲				✓	✓	
۳	✓					
۴	✓	✓				
۵	✓	✓				
۶	✓					

↑ تاس دوم

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گزینه ۳ درست است. ۲۲۴



پس احتمال خارج شدن مهره سفید از کیسه A برابر است با:

$$\frac{۲}{۵} \times \frac{۳}{۷} + \frac{۳}{۵} \times \frac{۲}{۷} = \frac{۱۲}{۳۵}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)